応用数値解析特論 第 10 回

〜Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法 (1) 弱形式, 定常 Stokes 方程式〜

かつらだ　まさし
桂田 祐史
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2024/

2024 年 6 月 25 日

目次

1. 本日の講義内容、連絡事項
2. Navier-Stokes 方程式に対する有限要素法
   - はじめに
   - 弱形式
     - ターゲット問題とその弱定式化
     - 弱形式 (2a) の導出
     - 弱形式を 1 つの方程式の形で書く (とても基本的)
   - 定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値問題
     - ターゲット問題と弱定式化
     - もう一つの弱形式
     - ペナルティー法
     - cavity 問題を解いてみる
     - お話 (鞍点型変分問題と inf-sup 条件)

本日の講義内容、連絡事項

1. 数学的準備として、Green の公式、部分積分の公式のベクトル値関数拡張を述べる。別資料 桂田 [?]「ベクトル値関数版 Green の公式、部分積分 — 流体力学のために —」の §3　(§4 の内容がこのスライド資料の補題 10.1 である。)
2. Navier-Stokes 方程式の有限要素法シミュレーションのため、弱形式の導出について説明する。3 種類の境界条件を扱えることを示すところがハイライト。
3. 定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値問題を有限要素法で解く方法を解説する。
   - (a) 2 で導出したのとは違う弱形式も紹介する。
   - (b) 普通に定式化すると圧力に一意性がないため、$Q=\left\{q\in L^2(\Omega)\;\middle|\;\int_\Omega q(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=0\right\}$ という関数空間を導入するのが定番のやり方であるが、そのままでは計算しにくい。そのため、**ペナルティー法** (penalty method) を用いるプログラムがしばしば利用される。それを紹介する。
   - (c) この (定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値) 問題が**鞍点型変分問題**であることを説明する。有限要素近似で解く場合に、**一様 inf-sup 条件**というものが重要となり、それは素朴に有限要素空間を選択すると満たされないことがある (例えば P1/P1)、ということを紹介する。

Navier-Stokes 方程式の適切性は未解決の問題である、と言うのは常識である。前回は時間切れでそこまで説明できなかった。付録「A. 適切性に関する常識」をつけておく。

目標 : Navier-Stokes 方程式の有限要素法シミュレーションの大まかな説明

有限要素法をするため、ある弱定式化を紹介する。応力境界条件や滑り境界条件などへの応用を考えて、粘性項に $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u})$ $(= \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u})$ を残した方程式から導出する弱形式を紹介するが、これが唯一の弱定式化というわけではない。例えば Dirichlet 境界値問題の場合は、別の弱定式化を使うこともできる (後で紹介する)。

元の微分方程式が非線形ならば、(当然) 弱形式も非線形になる。定常問題ならば、非線形方程式を解くために Newton 法などを利用する必要がある。それはそれで…

非定常問題の場合は、非線形方程式を解くのを避けることも出来るが、高い Reynolds 数の場合に安定性の問題が生じる。それへの対処法は現在でも研究課題のようだ。

一番基本的な定常 Stokes 方程式ならば簡単かと言うと、Poisson 方程式の場合の最小型変分原理とは異なる鞍点型変分原理の支配する問題で、その説明も一仕事だ。そもそも有限要素法で、区分的 1 次多項式 P1 ではうまく解けず、P2/P1 や P1b/P1 としなくてはならない、などは今では常識化されているが、説明 (あるいは納得) するのは一苦労である。

乱流が支配的な現象のシミュレーションについては、別のアプローチが必要になる。どこらへんで切り替える (give up する) ものだろうか。

Ω は $\mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$ の有界領域であり、その境界 $\partial\Omega$ は $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ の 3 部分からなるとする。

$$
\begin{aligned}
&\text{(1a)} \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p - \nu\left(\triangle \boldsymbol{u} + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\right) - \boldsymbol{f} = 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
&\text{(1b)} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
&\text{(1c)} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_1 \quad \text{on } \Gamma_1\times(0,\infty),\\
&\text{(1d)} \quad \sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}_2 \quad \text{on } \Gamma_2\times(0,\infty),\\
&\text{(1e)} \quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \quad \sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n} \quad \text{on } \Gamma_3\times(0,\infty).
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{u},p) &= -pI + 2\nu E(\boldsymbol{u}),\\
E(\boldsymbol{u}) &= \left(e_{ij}(\boldsymbol{u})\right), \quad e_{ij}(\boldsymbol{u}) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}
$$

非圧縮条件 (1b) を課しているのに、$+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$ を含めているのは、後で分かるが境界条件をうまく扱うためである。

関数空間

$$X(\phi) := \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^d \;\middle|\; \boldsymbol{u} = \phi \text{ on } \Gamma_1, \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \Gamma_3 \right\},$$

$$V := X(\boldsymbol{g}_1),$$

$$X := X(\boldsymbol{0}),$$

$$Q := \begin{cases} \left\{ q \in L^2(\Omega) \;\middle|\; (q, 1) = 0 \right\} & (\Gamma_1 = \partial\Omega, \text{ i.e. } \Gamma_2 = \Gamma_3 = \emptyset \text{ のとき}) \\ L^2(\Omega) & (\Gamma_1 \neq \partial\Omega \text{ のとき}). \end{cases}$$

注意　$\sigma(\boldsymbol{u}, p)\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n}$ (応力と法線は平行) という条件は、ここにも弱形式にも現れない (自然境界条件)。

11.2.1 ターゲット問題とその弱定式化

まず結果から先に述べると、(1a)–(1e) の弱定式化は次のようになる。

Find $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$\text{(2a)} \qquad \left(\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}, \boldsymbol{v}\right) + a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) + [\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{v}] \quad (\boldsymbol{v} \in X),$$

$$\text{(2b)} \qquad b(\boldsymbol{u}, q) = 0 \quad (q \in Q).$$

ただし

$$\text{(3)} \qquad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := 2\nu \int_\Omega E(\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{v})\, dx,$$

$$\text{(4)} \qquad b(\boldsymbol{v}, p) := -\int_\Omega p \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, dx,$$

$$\text{(5)} \qquad [\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{v}] := \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{v}\, d\sigma.$$

($d\sigma$ は面積要素 (2 次元ならば線要素, 弧長要素)、応力テンソル σ とは関係ない。)

(2b) の導出は簡単である。以下 (2a) の導出を説明する。

11.2.2 弱形式 (2a) の導出

任意の $\boldsymbol{v} \in X$ を取り、(1a) と内積をとり、Ω で積分する。

(6) $$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) + (\nabla p, \boldsymbol{v}) - \nu\left(\triangle \boldsymbol{u} + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\right) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

左辺第 1 項については当面放置する。左辺第 2 項については、(2b) 導出と同様に

$$(\nabla p, \boldsymbol{v}) = \int_{\partial\Omega} p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma - (p, \nabla\cdot\boldsymbol{v}).$$

一方、(6) の左辺第 3 項については、次の形の部分積分公式が利用出来る。

補題 10.1 (誰か名前つけないかな．ある種の部分積分公式)

(7) $$\left(\triangle \boldsymbol{u} + \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right), \boldsymbol{v}\right) = 2\int_{\partial\Omega} E(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\, d\sigma - 2\int_{\Omega} E(\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{v})\, dx.$$

ただし $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ に対して $P : Q := \sum_{i,j=1}^{d} p_{ij}q_{ij}$ とする。

この証明は後回しにして、とりあえずこれを使って (6) を書き換えると

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) - (p, \nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \int_{\partial\Omega} p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma$$
$$-2\nu\int_{\partial\Omega} E(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\, d\sigma + 2\nu\int_{\Omega} E(\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{v}) dx - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

11.2.2 弱形式 (2a) の導出

$p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} - 2\nu E(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = -(-pI + 2\nu E(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = -\sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$ であるから (←注目)

(8) $$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) - (p, \nabla\cdot\boldsymbol{v}) - \int_{\partial\Omega}\sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma + 2\nu\int_\Omega E(\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) = 0.$$

Γ_1 では、$\boldsymbol{v}\in X$ であることから $\boldsymbol{v}=0$. ゆえに

$$\int_{\Gamma_1}\sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma = 0.$$

Γ_2 では、$\sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}_2$ であるから

$$\int_{\Gamma_2}\sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma = \int_{\Gamma_2}\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma.$$

Γ_3 では、$\sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n}$ と平行で、$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ を満たすので

$$\int_{\Gamma_3}\sigma(\boldsymbol{u},p)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma = 0.$$

ゆえに (8) は次式と同値である。

(9) $$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) - (p, \nabla\cdot\boldsymbol{v}) + 2\nu\int_\Omega E(\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2}\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma - (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) = 0.$$

これを移項すると (2a) になる。 (証明終)

11.2.2 弱形式 (2a) の導出　後始末 (補題 10.1 の証明)

$$\int_\Omega E(\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) d\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\boldsymbol{x} \qquad \text{(展開した)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\boldsymbol{x} \qquad \left(\because \sum_{i,j} A_{ij} = \sum_{i,j} A_{ji}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\boldsymbol{x} \qquad \text{(ここから部分積分で } v \text{ の微分を } u \text{ によせる)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i n_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j n_i \right) d\sigma - \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} v_j \right) d\boldsymbol{x} \right)$$

$$= \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) v_i n_j d\sigma - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} v_j \right) d\boldsymbol{x} \quad \left(\because \sum_{i,j} A_{ij} = \sum_{i,j} A_{ji}\right)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \sum_i \left(\sum_j e_{ij} n_j \right) v_i d\sigma - \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) v_i + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) v_j \right) d\boldsymbol{x}$$

$$= \int_{\partial\Omega} E(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}\, d\sigma - \frac{1}{2} \int_\Omega (\triangle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}. \qquad \text{(証明終)}$$

11.2.3 弱形式を1つの方程式の形で書く

$$A(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) := a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) + b(\boldsymbol{u}, q)$$

とおく。次の 2 つの問題は同値である。

問題 1 (既に登場したもの)

Find $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (f, \boldsymbol{v}) \quad (v \in X),$$
$$b(\boldsymbol{u}, q) = 0 \quad (q \in Q).$$

問題 2

Find $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$A(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}, q) = (f, \boldsymbol{v}) \quad ((v, q) \in X \times Q). \tag{10}$$

$(\boldsymbol{u}, p)$ が問題 1 の解であれば、問題 2 の解であることはすぐ分かる。

一方 $(\boldsymbol{u}, p)$ が問題 2 の解であれば、

- $q = 0$ であるような $(\boldsymbol{v}, q)$ について考えると $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})$ が導かれ
- $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるような $(\boldsymbol{v}, q)$ について考えると $b(\boldsymbol{u}, q) = 0$ が導かれる

ので、$(\boldsymbol{u}, p)$ は問題 1 の解である。

FreeFem++ では、問題 2 の (10) の形で弱形式の指定をする。慣れる必要がある。

11.3 定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値問題

11.3.1 ターゲット問題と弱定式化

まず簡単な定常 Stokes 方程式の Dirichlet 境界値問題を考えよう。

$$-\nu\triangle \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad (\text{in } \Omega) \tag{11a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{11b}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_1 \quad (\text{in } \Gamma). \tag{11c}$$

境界条件もシンプル ($\Gamma_2 = \Gamma_3 = \emptyset$) になっていることに注意。

前項で説明した弱定式化をこちらに適用すると、次のようになる。

Find $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in X), \tag{12a}$$

$$b(\boldsymbol{u}, q) = 0 \quad (q \in Q). \tag{12b}$$

ただし

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := 2\nu\int_\Omega E(\boldsymbol{u}) : E(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}, \quad b(\boldsymbol{v}, p) := -\int_\Omega p\nabla\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}. \tag{13}$$

関数空間も次のようになる。

$$X(\phi) = \left\{\boldsymbol{w} \in H^1(\Omega)^d \;\middle|\; \boldsymbol{w} = \phi \text{ on } \Gamma\right\}, \quad V := X(\boldsymbol{g}_1), \quad X := X(\boldsymbol{0}),$$

$$Q := \left\{q \in L^2(\Omega) \;\middle|\; (q, 1) = 0\right\}.$$

11.3.2 もう一つの弱形式

§11.2 で弱形式を導くときに

(再掲 1a) $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p - \nu \left(\triangle \boldsymbol{u} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\right) - \boldsymbol{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

に試験関数をかけるところから始めたが、

(14) $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p - \nu \triangle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

から始めることも出来る。しかしその場合は、(自然に) 扱える境界条件が違ってくる。

11.3.2 もう一つの弱形式

(定常 Stokes 方程式の) 次の境界値問題を考える。

(15a) $$-\nu\triangle \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad (\text{in } \Omega),$$

(15b) $$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

(15c) $$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

(15d) $$-p\boldsymbol{n} + \nu\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{g}_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \quad (\leftarrow \text{新顔})$$

この場合は、a の代わりに

(16) $$a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := \nu\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \nu\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}d\boldsymbol{x}.$$

という内積を使えば良い。すなわち次の弱形式が得られる。

(17a) $$a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v}\in X),$$

(17b) $$b(\boldsymbol{u},q) = 0 \quad (q\in Q).$$

この内積 $a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ はシンプルで良さそうだが、この境界条件 (15d) の物理的な意味がはっきりしない。Dirichlet 境界条件の場合 ($\Gamma_2=\emptyset$ なので、(15d) は現れない) のみ $a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ を用いる、と考える方が良いかもしれない。

11.3.3 ペナルティー法

理論的には、上の (2 つ紹介した) 定式化で一応筋は通るのだが、Q のように平均 $(q,1) \overset{\text{def.}}{=} \int_\Omega q\,dx$ が 0 と言う条件を課した有限要素空間 (近似関数の空間) を使うのは難しい (何か工夫しないと連立 1 次方程式が解けない…)。

1 つの工夫として、実際の数値計算では、ペナルティー法 (penalty method) という方法がしばしば使われる (FreeFem++ のマニュアル Hecht [?] の §5.6 に少し説明がある…あれ、なくなっている！)。

これは、$\boldsymbol{u}$, p の代わりに、とても小さい正定数 ε (以下の例では 10^{-6} とか 10^{-10}) に対する、次の問題の解 $\boldsymbol{u}_\varepsilon$, p_ε を使う、というものである。

Find $(\boldsymbol{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V \times L^2(\Omega)$ s.t.

$$a(\boldsymbol{u}_\varepsilon, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p_\varepsilon) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in X), \tag{18a}$$

$$b(\boldsymbol{u}_\varepsilon, q) = \varepsilon(p_\varepsilon, q) \quad (q \in L^2(\Omega)). \tag{18b}$$

この問題は一意的な解を持ち、また次のような誤差評価が成り立つことが知られている (文献を紹介しないと…)。

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega} + \|p - p_\varepsilon\|_{0,\Omega} \le C\varepsilon \quad (C \text{ は } \varepsilon \text{ によらない正の定数 }).$$

実際には、さらに有限要素近似をすることになるが、近似解 $\hat{\boldsymbol{u}}$, $\hat{p}$ の精度よりも ε を十分小さく取れば、$\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon$, $\hat{p}_\varepsilon$ は近似解として遜色ないと期待出来る。

11.3.4 cavity 問題を解いてみる

流体の問題で、解法の “試し斬り” に使われることで有名な **cavity flow** の問題 (the driven cavity flow problem) を紹介する。

$$\Omega := (0,1)\times(0,1) \quad (\text{正方形領域}), \quad \Gamma := \partial\Omega,$$

$$\boldsymbol{g}_1(x,y) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (x=0 \text{ または } x=1 \text{ または } y=0) \\ \begin{pmatrix} g_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} & (y=1), \end{cases}$$

$$g_1(x) := 4x(1-x).$$

(正方形領域の境界のうち、上の辺を除いて流速は 0 (固体壁を想定), 上の辺では水平方向右向きに速さ $4x(1-x)$ で流れている。)

11.3.4 cavity 問題を解いてみる

Stokes-cavity.edp (前半)

```
// example 1
// Stokes equations : regularized cavity flow problem
// COE-tutorail 2007, Atsushi Suzuki 2007/03/08
//
mesh Th=square(20,20);
fespace Vh(Th,P1b),Qh(Th,P1);

Vh u1,u2,v1,v2;
Qh p,q;
macro d11(u1)     dx(u1) //
macro d22(u2)     dy(u2) //
macro d12(u1,u2)  (dy(u1) + dx(u2))/2.0 //

real epsln = 1.0e-6;

solve stokes([u1,u2,p], [v1,v2,q]) =
int2d(Th)( 2.0*(d11(u1)*d11(v1)+2.0*d12(u1,u2)*d12(v1,v2)+d22(u2)*d22(v2))
     - dx(v1)*p - dy(v2)*p - dx(u1)*q - dy(u2)*q
         - p*q*epsln
)
+  on(1,2,4,u1=0,u2=0)  +  on(3,u1=x*(1-x)*4,u2=0) ;
```

11.3.4 cavity 問題を解いてみる

Stokes-cavity.edp (後半)

```
real area = int2d(Th)(1.0);
real meanp = int2d(Th)(p) / area;
cout << "mean pressure = " << meanp << endl;
p = p - meanp;
plot([u1,u2],p,wait=1,value=true,coef=0.1);
```

入手して実行

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/Stokes-cavity.edp
FreeFem++ Stokes-cavity.edp
```

解は `plot([u1,u2],p,...)` として、流速のベクトル場と圧力の等高線を同時に表示している。

圧力 p はスカラー場であるので、`plot()` に渡すと、等高線が表示できる (Poisson 方程式のときの解の表示と同様)。

流速 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^\top$ は 2 次元ベクトル場であり、u1, u2 として求めている。これを `[u1,u2]` として `plot()` に渡すと、有向線分 (矢印) で表示される。矢印の大きさは A (大きくする), a (小さくする) で調節可能である (arrow の 'a' だろう)。

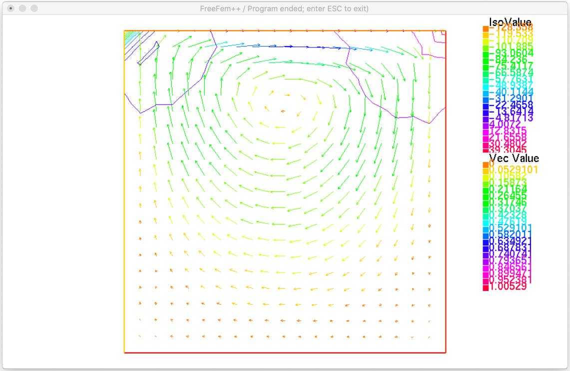

図 1: `Stokes-cavity.edp` の実行結果

‘A’ を打って少し矢印を大きくしてから画像を保存した

Poisson 方程式の際に、弱形式 (W) がある変分問題 (V) と同値であることを述べた。Stokes 方程式の問題も、弱形式はある種の変分問題と同値であることが知られている。それについて説明しよう。

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}, q) := \frac{1}{2} a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, q) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})$$

とおく。

問題 (S)

Find $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ s.t.

(19) $$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, q) \le \mathcal{L}(\boldsymbol{u}, p) \le \mathcal{L}(\boldsymbol{v}, p) \quad ((\boldsymbol{v}, q) \in V \times Q).$$

(19) は、$(\boldsymbol{u}, p)$ が $\mathcal{L}$ の鞍点であることを意味するので、**鞍点型変分問題** (saddle point problem) と呼ばれる。

Cf. $f(v, q) = v^2 - q^2$ $((v, q) \in \mathbb{R}^2)$ とする。$(u, p) = (0, 0)$ は極値点で次式を満たす (鞍点である):

$$f(u, q) \le f(u, p) \le f(v, p) \quad ((v, q) \in \mathbb{R}^2).$$

$(\boldsymbol{u}, p)$ が弱形式の解であることと、問題 (S) の解であることが同値であることを示すのは、手頃な演習問題である (解くとすっきりすると思われるので、お勧め)。

11.3.5 お話 (2) inf-sup 条件

最小型変分問題 (V) や、鞍点型変分問題 (S) について、解が一意的に存在することを保証する定理を紹介しようと考えているが (時間が足りるか少し心配…まず Poisson 方程式だろうし、Navier-Stokes 方程式は時間切れだろうか…)、鞍点型変分問題については、a が**強圧的**であること ($\displaystyle\inf_{\boldsymbol{v}\in V}\frac{a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|_V^2}>0$) と，$b$ が **inf-sup 条件**

$$\inf_{q\in Q}\sup_{\boldsymbol{v}\in V}\frac{b(\boldsymbol{v},q)}{\|q\|_Q\,\|\boldsymbol{v}\|_V}>0 \tag{20}$$

を満たすことが鍵となる。さらに有限要素近似を行う場合には、次の条件が必要となる。

- ある $\alpha>0$ が存在して、十分小さい任意の h に対して

$$\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\frac{a(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{V_h^2}}\ge\alpha \quad (\textbf{一様強圧性}).$$

- ある $\beta>0$ が存在して、十分小さい任意の h に対して

$$\inf_{q_h\in Q_h}\sup_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\frac{b(\boldsymbol{v}_h,q_h)}{\|q\|_{Q_h}\,\|\boldsymbol{v}_h\|_{V_h}}\ge\beta \quad (\textbf{一様 inf-sup 条件}).$$

このうち一様 inf-sup 条件は、V_h と Q_h の両方が関係することに注意。実は有限要素空間の選び方によっては、この条件が満たされないことがある。

11.3.5 お話 (2) inf-sup 条件 (続き)

例えば P1/P1 (流速も圧力も区分的 1 次多項式で近似) は、この一様 inf-sup 件を満たされず、実際にしばしば数値計算が破綻する。

P2/P1 (流速は区分的 2 次多項式, 圧力は区分的 1 次多項式) や P1b/P1 (流速は区分的 2 次多項式, 圧力は区分的 1 次多項式+気泡関数) は満たしている。

プログラム中で

```
fespace Vh(Th,P1b),Qh(Th,P1);
```

としているのに注目。`Qh` については、Poisson 方程式のときと同様に P1 (区分的 1 次多項式) 要素を用いているが、`Vh` については、P1 bubble (気泡関数要素, P1b あるいは P1+ と表す) を用いている。流速に P1 bubble, 圧力に P1 を用いる組み合わせを **MINI 要素**とも呼ぶ (らしい)。

A. 流体力学の方程式の適切性に関する常識 (耳学問)

考えている問題について、解の存在、一意性、解の (初期値・境界値などの) データに関する連続性が成り立つとき、その問題は**適切** (well-posed) である、と言う。

Navier-Stokes 方程式の適切性は、未解決な部分が残る重要な研究対象であり、やさしい教科書は見当たらない。道案内としては、岡本 [?] を推奨する。少し古いが、ラジゼンスカヤ [?] も定番本 (今絶版？機会があれば入手しておくと良いかも)。

以下は受け売りである。

圧力については定数差は無視できる場合が多い (方程式で考える範囲内では、p が解ならば、$p+C$ (C は定数) も解である、ということ。非圧縮という仮定をおいてあるせいか。)。

Stokes 方程式は、線形方程式であるから、適切性等についても満足の行く結果が得られている。例えば、[?] の第 2 章「線形化された定常問題」, 第 3 章「流体力学的ポテンシャル論」, 第 4 章「線形非定常問題」に、Stokes 方程式についての数学的考察が載っている。

A. 流体力学の方程式の適切性に関する常識 (耳学問)

Euler 方程式は、非線形方程式であり、手ごわい。ある程度まとまった日本語の解説としては、岡本 [?] がある。無限に多くの定常解が存在するなど、Stokes 方程式とは全く異なる様相を示す。

Euler 方程式は、Navier Stokes 方程式で形式的に $\nu \to 0$ ($\Leftrightarrow R_e \to \infty$) の極限を取ったものであるが、その解は、$\nu$ が小さい場合の Navier-Stokes 方程式の解とはかなり異なる (そうである)。

Naiver-Stokes 方程式の定常問題については、同次 Dirichlet 境界条件のもとでは、以下が成り立つ。

- つねに (粘性がどんなに小さくても) 定常解は存在する
- 外力がなければ定常解は一意である。
- 外力があっても、粘性が十分大きければ、定常解は一意である。
- 外力があって、粘性が小さい場合は、定常解は複数存在しうる。

$\cdots$ 結構複雑である。

Naiver-Stokes 方程式の非定常問題は、特に 3 次元の場合、いわゆるクレイ研究所のミレニアム問題にも選ばれた、折り紙つきの難問である。

2 変数 x, y の 2 次多項式とは

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$$

の形をしている。2 次多項式全体の集合は 6 次元の線形空間である。

多角形領域を三角形の要素に分割する。全体で連続、各三角形上で 2 次多項式と一致する関数を**区分的 2 次多項式**と呼ぶ。三角形 K 上の 2 次多項式全体を $P^2(K)$ と表す。

三角形 K の頂点を P_1, P_2, P_3 とし、それぞれの対辺の中点を P_4, P_5, P_6 とする。また、面積座標を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする (以前の L_1, L_2, L_3)。すなわち λ_i は 1 次多項式で、

(21) $$\lambda_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i, j \in \{1, 2, 3\}).$$

(22) $$\begin{aligned} &\phi_1 := \lambda_1(2\lambda_1 - 1),\ \phi_2 := \lambda_2(2\lambda_2 - 1),\ \phi_3 := \lambda_3(2\lambda_3 - 1), \\ &\phi_4 := 4\lambda_2\lambda_3,\ \phi_5 := 4\lambda_3\lambda_1,\ \phi_6 := 4\lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

とおく。これらはすべて 2 次多項式であり、次式を満たす。

(23) $$\phi_i(P_j) = \delta_{ij} \quad (i, j \in \{1, 2, \cdots, 6\}).$$

$\{\phi_i\}_{i=1}^6$ は $P^2(K)$ の基底であり、任意の $v \in P^2(K)$ は次のように表される。

(24) $$v = \sum_{i=1}^{6} v(P_i)\phi_i.$$

(準備中)

参考文献 I