

ベクトル値関数版 Green の公式、部分積分

— 流体力学のために —

桂田 祐史

2009年6月14日, 2024年6月25日

目次

| | | |
|-------|-----------------------------|---|
| 1 | はじめに | 2 |
| 2 | 常識として: Gauss の定理, Green の定理 | 2 |
| 2.1 | 記号 | 2 |
| 2.2 | いわゆる Green の定理 | 3 |
| 2.3 | 少し形式を変えて | 4 |
| 2.4 | おまけ | 4 |
| 2.4.1 | 物理的イメージ | 4 |
| 2.4.2 | 微分を2回続けると | 5 |
| 2.4.3 | ポテンシャルの存在 | 5 |
| 3 | Green の公式とベクトル値関数への拡張 | 5 |
| 3.1 | 高次元版微積分の基本定理 | 6 |
| 3.2 | Gauss の発散定理 | 6 |
| 3.3 | Green の積分公式 | 6 |
| 3.4 | ベクトル値関数版 Green の積分公式 | 7 |
| 3.5 | なんと呼ぼうかな (ベクトル値関数版部分積分?) | 7 |
| 4 | 流体力学の有限要素法で役立つ補題 | 7 |

1 はじめに

Gauss の発散定理や Green の積分公式は、ベクトル解析の本には必ず載っている。Poisson 方程式の弱定式化を考えるにはそれで十分だが、Navier-Stokes 方程式を扱うには、もう少し準備した方が便利である。

2 常識として: Gauss の定理, Green の定理

ベクトル解析は、多変数の微分と積分がからむ分野であり、私自身は微積分のうちに含まれると考えている。必修とされていないこともあるが、学ぶべきである。

基本的な科目なので、信頼できるテキストを手元においておくことを勧めたいが、とりあえず定義を確かめたければ、例えば桂田 [1] を見よ。

2.1 記号

以下 f はスカラー場、 $\mathbf{v} = (v_i) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ はベクトル場、 $P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ はテンソル場とする。

$$\begin{aligned} \text{grad } f = \nabla f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}, & \text{grad } \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \\ \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, & \text{div } P = \nabla \cdot P &= \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \\ \Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, & \Delta \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

\mathbf{u} を流体の速度場とする。物質微分 (material derivative) D/Dt とは

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

すなわち

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \begin{pmatrix} \frac{Dv_1}{Dt} \\ \frac{Dv_2}{Dt} \\ \frac{Dv_3}{Dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2つのテンソル場 $P = (p_{ij}), Q = (q_{ij})$ に対して

$$P : Q := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d p_{ij} q_{ij}$$

とおく。

方向微分係数の定義

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h\mathbf{a}) - f(x)}{h}$$

と合成関数の微分法から

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \text{grad } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}.$$

2.2 いわゆる Green の定理

Gauss の定理, Green の定理は、定理に現れる用語の説明が少し面倒であるが、とりあえず“飛ばして”定理を一応書いておく。

定理 2.1 (Gauss の発散定理) Ω を \mathbf{R}^3 の有界領域、 $S = \partial\Omega$ は有限個の C^1 級正則曲面からなるとするとき、 $\bar{\Omega}$ の近傍で定義された C^1 級のベクトル場 \mathbf{f} に対して

$$\iiint_{\Omega} \text{div } \mathbf{f} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

ただし \mathbf{n} は S の外向き単位法線ベクトル、 $d\sigma$ は面積要素である。

(これは3次元バージョンであるが、実は何次元でも成り立つ。2次元の場合、 $C = \partial\Omega$ は曲線で、 $d\sigma$ は線要素である。)

この定理の証明はそれなりに手間がかかる (特に用語の正確な説明に手間がかかるので、ここでは省略する)。しかし、それから次の定理を導くのは簡単である。

定理 2.2 (Green の定理, Green の積分公式) Ω は Gauss の発散定理が成り立つような \mathbf{R}^n の有界領域で、 Γ はその境界、 \mathbf{n} は Γ 上の点における外向き単位法線ベクトルとする。

(1) (Green's first identity) u, v が $\bar{\Omega}$ の近傍でそれぞれ C^2 級, C^1 級ならば

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma - \int_{\Omega} \text{grad } v \cdot \text{grad } u \, dx.$$

(2) (Green's second identity) u, v が $\bar{\Omega}$ の近傍で C^2 級ならば

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\sigma.$$

(3) u が $\bar{\Omega}$ の近傍で C^2 級ならば

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma.$$

特に u が調和関数である場合は $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma = 0$.

証明

(1) $\mathbf{f} := v \operatorname{grad} u$ とおくと

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u + v \Delta u$$

となること (積の微分法) に注意して、Gauss の発散定理を用いる。

(2) (1) と、(1) で u と v を入れ換えた式を並べて、辺々引き算すればよい。

(3) (1) で $v \equiv 1$ とおく。■

Green's third identity (Laplace 作用素の基本解の議論をするとき基礎となる) というものもあるが、それは省略する (例えば桂田 [2] §3.5.2 を見よ)。

2.3 少し形式を変えて

前項の説明は定番のものであるが、少し式に触れて探ってみよう。

菊地 [3] では、次の式を Green の公式と呼んでいる。

$$(1) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Gamma} u v n_j d\sigma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx \quad (1 \leq i \leq N).$$

この形にすると “部分積分の公式” との対応が鮮明で、なるほどと感じる人がいるかもしれない。

[3] ではさらに、式 (1) で、 $v \equiv 1$ とおいて得られる

$$(2) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_{\Gamma} u n_j d\sigma$$

を発散定理と呼んでいる。

逆に一般に (2) を仮定して、 u の代りに uv を代入すると、(1) が得られる。つまり、ある意味で (1) と (2) は同値である。

ベクトル場 $\mathbf{f} = (f_j)$ が与えられているとき、(2) の u として f_j を代入し、 $j = 1, 2, \dots, N$ について加えると

$$(3) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} dx = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

これは Gauss の発散定理である (そのためか、[3] では (2) を Gauss の発散定理と呼んでいる)。

逆に (3) で \mathbf{f} として、第 j 成分のみ u で、他は 0 というベクトル場を持って来ると、

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_{\Gamma} u n_j d\sigma$$

が得られる。つまり (2) が得られた。

要するに、出て来る関数を一般とすると、三つの式 (1), (2), (3) は同値である。

2.4 おまけ

2.4.1 物理的イメージ

grad は法線ベクトル 関数 $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$ について、方程式 $F(x) = c$ の定める曲線 (曲面) を等高線 (等値面) と呼ぶ。grad F はそれらの法線ベクトルとなる。

流束積分 単位法線ベクトルが \mathbf{n} である曲面 S (曲線 C) と速度場 \mathbf{v} について

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad \left(\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \right)$$

を**流束積分** (flux integral) と呼ぶ。物理的には、単位時間に S (C) を通り抜ける流体の体積 (面積) を表す。ただし、 \mathbf{n} の向いている側に出る量を正とする (S が領域 Ω の境界で、 \mathbf{n} が外向き単位法線ベクトルの場合は、 Ω の外に流出する量ということになる)。

2.4.2 微分を2回続けると

$$\begin{aligned} \text{rot grad} &= \mathbf{0} \quad (\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}), \\ \text{div grad} &= \Delta \quad (\nabla \cdot \nabla f = \Delta f), \\ \text{div rot} &= 0 \quad (\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0), \\ \text{rot rot} &= \text{grad div} - \Delta \quad (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}). \end{aligned}$$

2.4.3 ポテンシャルの存在

命題 2.3 (ポテンシャルの存在定理) \mathbf{R}^n の単連結領域 Ω におけるベクトル場 $\mathbf{f} = (f_i)$ が $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) を満たすならば、 $F(\mathbf{x}) := \int_{C_x} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ は C_x の取り方によらず well-defined であり、 $\nabla F = \mathbf{f}$ を満たす。ただし C_x は定点から \mathbf{x} に至る Ω 内の曲線である。

特に3次元ベクトル場 \mathbf{f} が $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ を満たす場合、2次元ベクトル場 \mathbf{f} が $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$ を満たす場合、 \mathbf{f} はポテンシャルを持つ。

理解を深めるための注意を2つ

- 1変数関数の場合の $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x)$ に相当する。
- C^2 級のポテンシャル F が存在する場合、 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ であるから、 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ が成り立つことは明らかである。

3 Green の公式とベクトル値関数への拡張

流体力学の方程式を扱うためには、前項の Green の公式だけでは不十分で、次の2つの公式が必要になる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx &= \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx. \\ \int_{\Omega} \nabla p \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx &= \int_{\partial \Omega} p \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} p \, \text{div } \boldsymbol{\varphi} \, dx. \end{aligned}$$

ここでは、シンプルな結果から出発して、上の2式を含む使いそうな公式すべてを導出して見せる。

この手の定理は、厳密な定式化は難しいが、やっていることは非常に単純である、と理解してもらいたい。

3.1 高次元版微積分の基本定理

(ここは雑談レベル。)

$d \geq 2$ として (授業では、 $d = 2$ くらいで絵を描いて説明した後、最後に 3 次元ではこうなる、と説明する)、 $j \in \{1, \dots, d\}$ を固定する。 $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ に対して、

$$\hat{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d)$$

とおく。

$\Omega \subset \mathbf{R}^d$ が

$$\Omega = \{x = (x_i); \hat{x} \in D, \varphi(\hat{x}) < x_j < \psi(\hat{x})\}$$

と表されるとき (おなじみの「縦線集合」)、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx &= \int_D \left(\int_{\varphi(\hat{x})}^{\psi(\hat{x})} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j \right) d\hat{x} \\ &= \int_D [u(x_1, \dots, x_{j-1}, \psi(\hat{x}), x_{j+1}, \dots, x_d) - u(x_1, \dots, x_{j-1}, \varphi(\hat{x}), x_{j+1}, \dots, x_d)] d\hat{x}. \end{aligned}$$

図形を描いたりして、2 本ある $\partial\Omega$ のうち、上側では $n_j d\sigma = d\hat{x}$ 、下側では $n_j d\sigma = -d\hat{x}$ であることを納得してもらおう。そうすると、これが $\int_{\partial\Omega} u n_j d\sigma$ に等しいことが分かる。ゆえに

$$(4) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} u n_j d\sigma.$$

この形にすると、縦線領域でない Ω に対しても通用する公式になる。これを高次元版の微積分学の基本定理、と言っておく ($\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ の高次元化)。

3.2 Gauss の発散定理

ベクトル値関数 $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_d)^\top$ が与えられたとき、(4) で、 $u = f_j$ として、 j について和を取ると、

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^d f_j n_j d\sigma.$$

こうして有名な Gauss の発散定理を得る。

$$(5) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

逆に $\mathbf{f} := u \mathbf{e}_j$ とすると、(4) が導かれる。その意味では、(4) と (5) は同値である。

3.3 Green の積分公式

スカラー値関数 u, v が与えられたとき、 $\mathbf{f} := v \nabla u$ とおくと、 $\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$ (積の微分法) であるから、(5) は、

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

これを移項して、 $\nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial n}$ に注意すると、次の Green の積分公式を得る。

$$(6) \quad \int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

これが定理 2.2 の (1) であり、それからすぐに (2), (3) が導かれる。

3.4 ベクトル値関数版 Green の積分公式

繰り返しになるが、記号について注意しておく。 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^T$ に対して、

$$\Delta \mathbf{u} := \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_d \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_d}{\partial n} \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{u} := \mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_d}{\partial x_d} \end{pmatrix},$$

また $P = (p_{ij}), Q = (q_{ij})$ に対して、

$$P : Q := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d p_{ij} q_{ij}$$

とおく。

(6) の u, v として、 u_j, v_j を取り、 $j \in \{1, \dots, d\}$ について和を取ることで、次を得る。

$$(7) \quad \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx.$$

私の講義では、ベクトル値関数版 Green の積分公式と呼ぶことにしておく。

3.5 なんと呼ぼうかな (ベクトル値関数版部分積分?)

与えられたスカラー値関数 f, g に対して、 $u := fg$ とおくと、(4) は

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx = \int_{\partial \Omega} f g n_i \, d\sigma - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx$$

となる。私の講義では、部分積分の公式と呼んでいる (微積分の基本定理に、積の微分法の式を代入して得られる、という点で、ピッタリだと考えている)。

$g = g_i$ とおいて、和を取ると、($\mathbf{g} := (g_1, \dots, g_d)^T$ として)

$$(8) \quad \int_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{g} \, dx = \int_{\partial \Omega} f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} f \operatorname{div} \mathbf{g} \, dx.$$

これは特に名前がついていないようだが、案外と良く用いられる。私の講義では、ベクトル値関数版部分積分の公式と呼ぶことにしておく。

4 流体力学の有限要素法で役立つ補題

変形速度テンソル

$$E(\mathbf{u}) := \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

についての次の積分公式が重要である。

命題 4.1

$$(9) \quad \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) : E(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\partial \Omega} E(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} \, dx.$$

証明

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) : E(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} \quad (\text{展開した}) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \quad (\because \sum_{i,j} A_{ij} = \sum_{i,j} A_{ji}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} \quad (\text{ここから部分積分で } v \text{ の微分を } u \text{ によせる}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i n_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j n_i \right) d\sigma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} v_j \right) d\mathbf{x} \right) \\
 &= \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) v_i n_j d\sigma - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} v_j \right) d\mathbf{x} \quad (\because \sum_{i,j} A_{ij} = \sum_{i,j} A_{ji}) \\
 &= \int_{\partial\Omega} \sum_i \left(\sum_j e_{ij} n_j \right) v_i d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) v_i + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) v_j \right) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\partial\Omega} E(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{証明終})
 \end{aligned}$$

すなわち

$$(10) \quad \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) : E(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} E(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \blacksquare$$

参考文献

- [1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf> (内容はベクトル解析) (2006~).
- [2] 桂田祐史：微分方程式 2 講義ノート (旧「応用解析 II」), <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/pde/pde2013.pdf> (1997 年~).
- [3] 菊地文雄：有限要素法の数理, 培風館 (1994), 有限要素法の解析に関する貴重な和書です。版元在庫切れ状態です。読みたい学生は相談して下さい。