

# 応用数値解析特論 演習課題 B

## ～正多角形領域における Laplacian の固有値～

桂田 祐史

2024年7月9日, 2024年7月9日

7月2日に、正方形領域で Laplacian の固有値問題を解くプログラムを紹介した。

—— もう一度やってみよう (ターミナルで実行) ——

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/fem/LaplacianEigenvalues.edp
FreeFem++ LaplacianEigenvalues.edp
```

固有値の小さい順に結果 (固有値と固有関数の等高線) が出力される。固有関数の等高線が目  
を引くが、固有値は画面上部に表示されていて、順に

2, 5, 5, 8, 10, 10, 13, 13, 17, 17, 18, 20, 20, 25.0001, 25.0001, 26.0001, 26.0001, 29.0001, 29.0001, 32.0002.

同じ固有値が続く (これを固有値が縮重 (degenerate) しているという) ことが多いのが分かる。

1. なぜ縮重が起こるのか。(答え方は色々ある。正方形なので、固有値を式で厳密に表すことが出来る。とりあえずそれを元にして答えるだけでも良い。)
2. 長方形領域ではどうなるか。長方形の辺の長さを変えて、“だんだん”正方形に近づけていくとどうなるか。実際に数値計算した結果を見て答えよ。

```
mesh Th=square(80,80,[pi*x,pi*y]);
```

これは  $(0, \pi) \times (0, \pi)$  という領域を分割している。square() という名前だが、実は mesh Th=square(80,80,[a\*x,b\*y]); とすれば、長方形領域  $(0, a) \times (0, b)$  の分割ができる。適当に選んだ  $a, b$  に対して計算して考えよう。

3. 正方形 (正四角形) 以外の正多角形領域 (正三角形、正五角形、正六角形、...) ではどうなるか。何か1つ選んで計算してみよう。実はやはり縮重が起こるのだが、数値計算をした場合、値が近いけれど少しずれる、ということがおこる。
4. 3. のずれの原因は、三角形分割に対称性がないからであり、対称な三角形分割を行うと縮重していることがはっきり分かるようになる。次の論文 (現象数理専攻の修士論文) は、正多角形領域におけるラプラシアンではない微分作用素 (ラプラシアンの自乗  $\Delta^2 \dots$  現象としては、膜の振動でなくて板の振動にかかわる固有値を求めることに相当する) の固有値問題を扱ったものである。

遠藤小欽「正多角形板の Chladni 図形」(2016/2/12)<sup>1</sup>

<sup>1</sup><https://m-katsurada.sakura.ne.jp/gensyou2019/2016-endo.pdf>

この論文の付録 B の C プログラムで、正多角形領域の対称な三角形分割が作れる。

—— 試してみよう: 正五角形領域の対称な分割 ——

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana/pentagon.c
cc pentagon.c
./a.out > pentagon.msh
```

これで `pentagon.msh` というファイルができる。`LaplacianEigenvalue.edp` 中の `mesh Th=square(80,80,[pi*x,pi*y]);` の代わりに

—— “pentagon.msh” の内容でメッシュ Th を定義する ——

```
mesh Th = readmesh("pentagon.msh");
plot(Th,wait=true); // 分割の様子を確認
```

とすればファイル `pentagon.msh` の内容を読み込み、それでメッシュ Th が出来る。これで正五角形の固有値を調べてみよ。

5. 正方形、正五角形以外の正多角形ではどうか？

FreeFem++ の Documentation の 5.4 に “Eigen value problems” がある。

これは、以前紹介した「2次元 Laplacian の固有値問題を FreeFem++ で解く」<sup>2</sup> の元ネタである。

---

<sup>2</sup><https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/text/welcome-to-freefem/node9.html>