陰関数定理を覚える

桂田 祐史

2009年7月18日

結構長いから、段階的に詳細化するのが一つの手である。これを説明してみよう。

陰関数定理とは、授業でも言ったのだが、2変数の方程式

$$F(x,y)=0$$

を1つの変数 (ここでは y とする) について

$$y=\varphi(x)$$

のように解くための定理であり、そのために一番重要な仮定が

$$\det\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$$

である[1]。つまり、もの凄く乱暴に言うと

第1近似

> $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ ならば、$F(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ と解ける。

これを見ると、(a,b) って一体なんだろう？φ って一体なんだろう？「解ける」とはどういうことか？と疑問が湧いて来る (そうでないといけない)。例えば、まず (a,b) について少し書き足すことにしよう。$F(x,y)=0$ が「全体で」解けることは一般には望めなくて、注目している点の近くだけで解けることくらいしか期待できない。その注目している点が (a,b) ということだ。それは $F(x,y)=0$ の上にある。そこで次のようにする。

第2近似

> $F(a,b)=0$, $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ ならば、$F(x,y)=0$ は、(a,b) のある近傍で $y=\varphi(x)$ と解ける。

φ というのは、陰関数で、この存在を主張しているのが大事なところ、という話もした。そこでそれをはっきり言ってみよう。

[1] この仮定がもしも覚えにくければ、F が1次関数、つまり $F(x,y)=Ax+By+c$ の場合を考えると良いかもしれない。つまり $Ax+By+c=0$ から、$By=-Ax-c$ としておいて、次にやりたいは B^{-1} を左からかけること。そのためには $\det B\neq 0$ という仮定をおきたい。そして $B=\dfrac{\partial F}{\partial y}$ である。ということで、仮定が $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ であるのはもっともらしい。

第３近似

$F(a,b)=0$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ならば、ある C^1 級の関数 φ が存在して、(a,b) のある近傍で, $F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ が成り立つ。

大部よくなって来た。採点基準は実は結構甘いのであまり言いたくないが、それによるとこの状態の答案には (満点はやらないが) 結構イイ点がつく、とだけ言っておこう。

次がちょっと大変だ。ある近傍と言うのが $U\times V$ である。その U, V というのが、φ については定義域と終域、つまり $\varphi\colon U\to V$ で、U は a の開近傍、V は b の開近傍ということである。これらは一部だけ書いて全部は書かないというのは変なので、次は一気に書くことが増える (と言っても分量で１行未満の増加)。

第４近似

$F(a,b)=0$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ならば、a のある開近傍 U, b のある開近傍 V, ある C^1 級の関数 $\varphi\colon U\to V$ が存在して、$\forall (x,y)\in U\times V$ について、$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ が成り立つ。

お好みならば、黒板文体もあるな。

第４近似′

$F(a,b)=0$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0 \Longrightarrow$ ($\exists U$: a の開近傍) ($\exists V$: b の開近傍) ($\exists \varphi\colon U\to V \quad C^1$ 級) s.t. $\forall (x,y)\in U\times V \quad F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$.

そろそろ F についても、ちゃんと書かないとまずいだろう。

Ω は $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ の開集合で、$F\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ は C^1 級の写像とし、$(a,b)\in\Omega$ とする。

というのを書き足す。C^1 というのは、そんなに難しくないであろう。$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ や $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ が出て来るのだから。x が m 次元ベクトル、y が n 次元ベクトルとするとき、F の値も n 次元ベクトルというのが押えておきたいところである。これも授業中にしゃべったが、そうしておくことで、$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ が正方行列になって (そうでないと $\det$ も考えられない)、まともな逆が存在する可能性が生じるのである (ここら辺は線形代数がちゃんと身についているかだな)。

第５近似

Ω は $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ の開集合で、$F\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ は C^1 級の写像とし、$(a,b)\in\Omega$ とする。$F(a,b)=0$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ならば、a のある開近傍 U, b のある開近傍 V, ある C^1 級の関数 $\varphi\colon U\to V$ が存在して、$\forall (x,y)\in U\times V$ について、$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ が成り立つ。

後は $U\times V\subset\Omega$ を入れるくらいか。導関数の公式 $\varphi'(x) = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))$ は書いておかなくても、φ が C^1 と分かっていれば後から自前で出せる (出せないといけない)。

第 6 近似

Ω は $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ の開集合で、$F\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ は C^1 級の写像とし、$(a,b) \in \Omega$ とする。$F(a,b) = 0$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ならば、a のある開近傍 U, b のある開近傍 V, ある C^1 級の関数 $\varphi\colon U \to V$ が存在して、$\forall (x,y) \in U \times V$ について、$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$, $U \times V \subset \Omega$ が成り立つ。

これで一応の出来上がり。