多変数の微分積分学1 期末試験問題集

桂田 祐史

2009年3月16日

この文書は次のページから入手できます(もし後半が読みたければアクセスして下さい)。

http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/tahensuu1/

目 次

1　2008 年度

1.1　2008 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 試験問題

(2008 年 7 月 28 日施行)
次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。6 は 6A, 6B のうちから一問を選択して解答せよ。

1　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例 (ただし空集合、全空間以外のもの) をあげよ。(3) (2) であげた集合が開集合であることを、(1) の定義に基づき確かめよ。

2　$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ について、(a) f は連続, (b) f は各変数につき偏微分可能, (c) f は C^1 級, (d) f は全微分可能, という 4 つの条件を考える。
(1) (c) と (d) の定義を述べよ。(2) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を次式で定めるとき、f が条件 (a)〜(d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3+x^2+xy^2+xy+y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 1 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}). \end{cases}$$

3　2次元の極座標変換を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) C^2 級の関数 $f = f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta) := f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r + \dfrac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$.

4　$f(x,y) := 2x^3 + xy + 4x^2 + y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の (x,y) における Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。 (4) (3) で求めた極値は、最大値でも最小値でもないことを示せ。

5　(1) 陰関数定理を書け。(2) 正定数 a が与えられたとき、$F(x,y) := x^3 + y^3 - 3axy$, $N_F := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; F(x,y) = 0\}$ とおく。(a) N_F 上の点 $\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$ の十分小さな開近傍において、$F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、$\varphi'\left(\dfrac{3a}{2}\right)$ を求めよ。(b) $(0,0)$ において陰関数が存在するか論ぜよ。

6A　$f(x,y) := x^2 + y^2$, $g(x,y) := x^2 - 6xy + y^2 + 2$, $N_g := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; g(x,y) = 0\}$ とする。
(1) N_g 上で f が (x_0, y_0) で極値を取るとはどういうことか、説明せよ。
(2) N_g 上で $\nabla g \neq 0$ であることを示せ。(3) Lagrange の未定乗数法により、N_g 上での f の極値の候補点を求めよ。(4) (3) で求めた極値の候補が最小値であることを証明せよ。

6B　正数 s が与えられたとき、周の長さが $2s$ である三角形のうちで面積最大のものが何か、計算で調べることを考える。面積を表す関数の極値問題を定式化して、その極値を求めよ。その極値が最大値であることを証明せよ。

注　**5** と **6A** を解答するのに参考となる図を裏面につける。

1.2　2008年度 多変数の微分積分学1, 多変数の微分積分学1演習 試験問題解答

1.　(1) $A \subset \mathbf{R}^n$ とするとき、A が開集合であるとは、

$$\forall a \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(a;\varepsilon) \subset A$$

が成り立つことをいう。ここで $B(a;\varepsilon) := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| < \varepsilon\}$.
(2) $A := (0,\infty) \times (0,\infty)$ とすると、A は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。(3) $\forall (a,b) \in A$ に対して、$\varepsilon := \min\{a,b\}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$B((a,b);\varepsilon) \subset A$ が成り立つ。実際、$(x,y) \in B((a,b);\varepsilon)$ とすると、定義から、$(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2$ であるので、$(x-a)^2 < \varepsilon^2$ かつ $(y-b)^2 < \varepsilon^2$. これから $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ かつ $-\varepsilon < y - b < \varepsilon$. $\varepsilon \le a$ かつ $\varepsilon \le b$ であることに注意すると、$x > a - \varepsilon \ge a - a = 0$ かつ $y > b - \varepsilon \ge b - b$. ゆえに $x > 0$ かつ $y > 0$. これは $(x,y) \in A$ であることを意味する。 ■

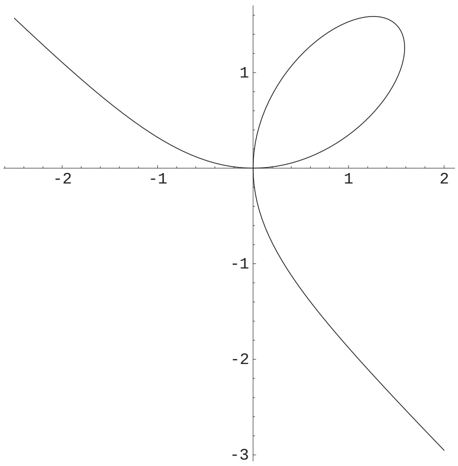


図 1: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a = 1$ の場合)

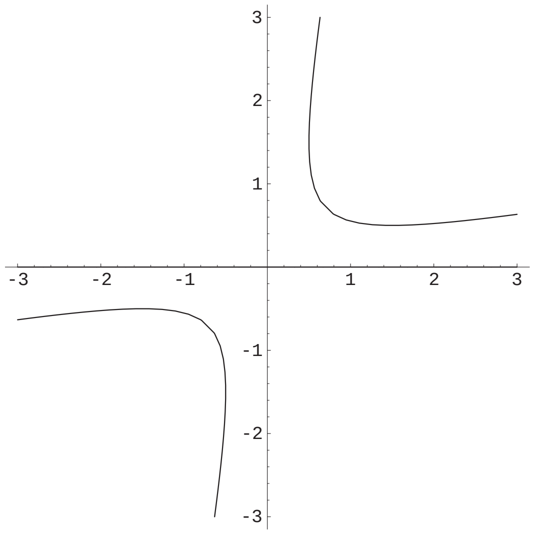


図 2: $x^2 - 6xy + y^2 + 2 = 0$

2.

(1) f が C^1 級であるとは、f が Ω 上連続かつ、任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ と任意の $a \in \Omega$ に対して、$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$ が存在して (e_i は第 i 成分が 1 で、他のすべての成分が 0 であるような $\mathbf{R}^n$ の元)、写像 $\Omega \ni x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbf{R}$ が連続であることをいう。f が全微分可能であるとは、$\forall a \in \Omega$ に対して、$A \in M(1, n; \mathbf{R})$ が存在して、$\lim_{h \to 0} \dfrac{|f(a + h) - f(a) - Ah|}{\|h\|} = 0$ が成り立つことをいう。

(2) f は $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ において有理関数に一致するので、その範囲では C^∞ 級であるので、明らかに (a), (b), (c), (d) は成立する。$(0, 0)$ でどうなるかを調べる。

(a) f は $(0, 0)$ では連続でない。なぜならば

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{x^3 + x^2 + xy^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^3 + xy^2 + xy}{x^2 + y^2} = x + \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

であり、これは $(x, y) \to (0, 0)$ のとき 0 に収束しないからである。それを確めるためには、例えば $y = kx$ に沿っての極限を調べればよい。

$$f(x, kx) - f(0, 0) = x + \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = x + \frac{k}{1 + k^2} \to \frac{k}{1 + k^2} \quad (x \to 0)$$

であり、k の値によっては 0 にならないので (あるいは、k によって異なる値となるので極限が存在しない、と言っても良い)、$f(x, y) - f(0, 0)$ の極限は 0 でない。

(b) f は $(0,0)$ では、x についても、y についても偏微分可能である。なぜならば

$$
\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^3+h^2+h\cdot 0^2+h\cdot 0+0^2}{h^2+0^2}-1\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left((h+1)-1\right) = \lim_{h\to 0}1 = 1,\\
f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{0^3+0^2+0\cdot h^2+0\cdot h+h^2}{0^2+h^2}-1\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(1-1\right) = \lim_{h\to 0}0 = 0.
\end{aligned}
$$

(c) f は C^1 級ではない。もし C^1 級ならば、(定義によって) 特に連続であるが、上で示したように、f は $(0,0)$ で連続でないからである。

(d) f は全微分可能ではない。もし全微分可能ならば、連続であるが、上で示したように、f は $(0,0)$ で連続でないからである。 ■

3.

(1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ であるから、

$$
x_r=\cos\theta,\quad x_\theta=-r\sin\theta,\quad y_r=\sin\theta,\quad x_\theta=r\cos\theta.
$$

(2) $\det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=r$ であるから、$r\neq 0$ のとき、逆写像が微分可能であることが分かる。

$$
\begin{pmatrix} r_x & r_y\\ \theta_x & \theta_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}
$$

であるから、

$$
r_x=\cos\theta,\quad r_y=\sin\theta,\quad \theta_x=-\frac{\sin\theta}{r},\quad \theta_y=\frac{\cos\theta}{r}.
$$

(3) (省略する。講義ノートの **C.3.2** (2008 年 7 月 27 日現在, pp.137–139) に書いてある。) ■

4. (1), (2), (3) $f(x,y)=2x^3+xy+4x^2+y^2$ より、

$$
\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} f_x(x,y)\\ f_y(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x^2+y+8x\\ x+2y\end{pmatrix},\quad H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x+8 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y)=0 \quad &\Leftrightarrow\quad 6x^2+y+8x=0 \quad\wedge\quad x+2y=0\\
&\Leftrightarrow\quad x=-2y \quad\wedge\quad 6(-2y)^2+y+8(-2y)=0\\
&\Leftrightarrow\quad (y=0 \quad\vee\quad y=\frac{5}{8}) \quad\wedge\quad x=-2y\\
&\Leftrightarrow\quad (x,y)=(0,0),(-\frac{5}{4},\frac{5}{8}).
\end{aligned}
$$

$H(0,0)=\begin{pmatrix}8&1\\1&2\end{pmatrix}$ の固有多項式は、$\lambda^2-10\lambda+15$. 固有値は $5\pm\sqrt{5^2-1\cdot 15}=5\pm\sqrt{10}$ で、これは両方とも正なので、$H(0,0)$ は正値である。ゆえに f は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=0$ を取る。

$H\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{8}\right)=\begin{pmatrix}-7&1\\1&2\end{pmatrix}$ の固有多項式は、$\lambda^2+5\lambda-15=0$. 固有値は $\lambda=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2+4\cdot 1\cdot 15}}{2}=\dfrac{-5\pm 4\sqrt{5}}{2}$ で、これは正負両方あるので、$H\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{8}\right)$ は不定符号である。ゆえに f は $\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{8}\right)$ で極値を取らない。

(4) $f(x,0)=x^3+x^2$ は、いくらでも大きな値、いくらでも小さな値を取ることは明らかである ($\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+x^2)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x^2)=-\infty$ であるから)。ゆえに f は最大値、最小値を持たない。 ■

5 (1) (省略する) (2) F は 2 変数の多項式関数であるから、$\mathbf{R}^2$ 全体で C^∞ である。

$$F\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)=\left(\frac{3a}{2}\right)^3+\left(\frac{3a}{2}\right)^3-3a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3a}{2}=\left(\frac{27}{8}+\frac{27}{8}-\frac{27}{4}\right)a^3=0.$$

$$F_y(x,y)=3y^2-3ax,\quad F_y\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)=3\left(\frac{3a}{2}\right)^2-3a\frac{3a}{2}=\frac{9a^2}{4}\neq 0.$$

であるから、$\frac{3a}{2}$ の十分小さな開近傍 U と V が存在して、$U\times V$ で $F(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ と解けて、$\varphi\colon U\to V$ は C^1 級となる。$F(x,\varphi(x))=0$ より、$F_x(x,\varphi(x))+F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$ となるので、$\varphi'(x)=-\dfrac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$. $F_x(x,y)=3x^2-3ay$, $F_x\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)=\frac{9a^2}{4}$ であるから、

$$\varphi'\left(\frac{3a}{2}\right)=-\frac{F_x\left(3a/2,3a/2\right)}{F_y\left(3a/2,3a/2\right)}=-\frac{9a^2/4}{9a^2/4}=-1.$$

(3) グラフを見ると、原点のどんなに小さな開近傍を取っても、1 つの x に対して、$F(x,y)=0$ を満たす y が 3 個存在したり、1 つの y に対して、$F(x,y)=0$ を満たす x が 3 個存在したりする (そもそも原点で 2 本の曲線が交差している)。ゆえに陰関数は存在しない。$F_x(0,0)=F_y(0,0)=0$ であるから、陰関数定理とは矛盾しない (つまり陰関数定理の仮定の条件が成立しない)。 ■

6A $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}f_x\\f_y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}g_x\\g_y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x-3y\\y-3x\end{pmatrix}$.

(1) $\exists\varepsilon>0$ s.t. f は $N_g\cap B((x_0,y_0);\varepsilon)$ 内の最大値または最小値を (x_0,y_0) で取る。粗く言うと、「(x_0,y_0) の十分小さな近傍と N_g の共通部分で、$f(x_0,y_0)$ が最大値または最小値となること。」

(2) $\nabla g(x,y)=0$ とすると、$(x,y)=(0,0)$ が導かれ、一方 $g(0,0)=2\neq 0$ であるから $(0,0)\notin N_g$. ゆえに $\nabla g(x,y)\neq 0$ on N_g.

(3) (2) で示したことから、条件 $g(x,y)=0$ の下での条件付き極値は、Lagrange の未定乗数法で求まる。すなわち、(x,y) で極値を取ったとすると、$\exists\lambda\in\mathbf{R}$ s.t.

$$(☆)\qquad \nabla f(x,y)=\lambda g(x,y),\quad g(x,y)=0.$$

前者から $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x-3y\\y-3x\end{pmatrix}$. これから[1] $\begin{pmatrix}1-\lambda & 3\lambda\\ 3\lambda & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. 係数行列が逆行列を持つと $(x,y)=(0,0)$ となり、これは不適 ($g(x,y)=0$ を満たさない)。逆行列を持たないためには、$(\lambda-1)^2-(3\lambda)^2=0$ が必要十分で、これから $(4\lambda-1)(2\lambda+1)=0$. すなわち $\lambda=\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2}$.

(i) $\lambda=1/4$ のとき、$\nabla f(x,y)=\lambda g(x,y)$ は $x+y=0$ と同値で、これと $g(x,y)=0$ を連立させると実数解なし。

(ii) $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ のとき、$\nabla f(x,y)=\lambda g(x,y)$ は $x=y$ と同値で、これと $g(x,y)=0$ を連立させると、 $x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ゆえに $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. いずれも f の値は 1. このままでは、極値の候補点のままで、実際に極値であることを示すのはもう一仕事必要ですね。次の (4) までやれば OK ですが。そういう意味で、(3) と (4) を分けたのは、失敗でした。

(4) $B:=\{(x,y);x^2+y^2\le 2^2\}$ (原点中心半径 2 の閉円盤) とおく。$B\cap N_g$ は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合である。ゆえに f が $B\cap N_g$ で最小値を持つ。それは明らかに 4 以下である。$(\mathbf{R}^2\setminus B)\cap N_g$ 上の任意の点において、f は 4 より大きいので、$B\cap N_g$ における最小値は、N_g における最小値となる。特に f は N_g 上で最小値を持つことが分かった。最小値は極値であるが、上で示したように、極値は $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$, $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$ しかない。ゆえにこれらが最小値である。 ■

6B 先に答を言うと、正三角形が解である (直観的に分かる人がいるであろう)。それを証明するのは案外難しい。ここでは、それを計算で示してみよう、ということである。

三角形の 3 辺を a, b, c とすると、$a+b+c=2s$. 三角形の面積 S は、ヘロンの公式により $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. $c=2s-(a+b)$ より $s-c=a+b-s$ であるから、$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(a+b-s)}$. そこで

$$f(a,b):=S^2=s(s-a)(s-b)(a+b-s)$$

で定義される関数 f を調べる。とりあえず $\mathbf{R}^2$ 全体で考える。そこで f は C^2 級である。

$$\nabla f(a,b)=\begin{pmatrix}s(2ab+b^2-2as-3bs+2s^2)\\ s(2ab+a^2-2bs-3as+2s^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s(2a+b-2s)(b-s)\\ s(a+2b-2s)(a-s)\end{pmatrix},\quad H(a,b)=\begin{pmatrix}2(b-s) & 2a\cdots\\ 2a+2b-3s & 2\cdots\end{pmatrix}$$

[1] $\dfrac{1}{\lambda}$ が行列 $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ の固有値で、(x,y) が固有ベクトル、ということに気が付いて線型代数に持ち込んでもよい。

ゆえに $\nabla f(a,b)=0$ の解は $(a,b)=(0,s),(s,0),(s,s),(2s/3,2s/3)$.

$$f(0,s)=0,\quad f(s,0)=0,\quad f(s,s)=0,\quad f(2s/3,2s/3)=\frac{s^4}{27},$$

$$H(0,s)=\begin{pmatrix}0 & -s\\ -s & -2s\end{pmatrix},\ H(s,0)=\begin{pmatrix}-2s & -s\\ -s & 0\end{pmatrix},\ H(s,s)=\begin{pmatrix}0 & s\\ s & 0\end{pmatrix},\ H(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3})=\begin{pmatrix}-\frac{2s}{3} & -\frac{s}{3}\\ -\frac{s}{3} & -\frac{2s}{3}\end{pmatrix}.$$

行列は順に、不定符号、不定符号、不定符号、負値なので、f の極値は、$(a,b)=(2s/3,2s/3)$ のときの極大値 $s^4/27$ のみ。

3 つの実数 a, b, c が三角形の 3 辺の長さとなるための必要十分条件は、(i) 正であること, (ii) 任意の 2 数の和が残りの数より大きいこと、すなわち、

$$a>0,\ b>0,\ c>0,\ a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b.$$

$a+b+c=2s$ より導かれる $c=2s-(a+b)$ を用いて、c を消去すると

$$a>0,\ b>0,\ a+b<2s,\ a+b<s,\ s>a,\ s>b.$$

まとめると (図に描くと簡単)、三角形を与える (a,b) の範囲は $\Delta:=\{(a,b);a+b>s,\ a<s,\ b<s\}$ となる (ab 平面上の、3 点 $(s,0)$, $(0,s)$, (s,s) を頂点とする三角形である)。従って、f の Δ での最大値を求めればよい。上で求めた f の 4 つの停留点は、

$$(s,0),(0,s),(s,s)\in\partial\Delta,\quad \left(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3}\right)\in\Delta$$

を満たす (だから Hesse 行列を調べなくても、意味のある範囲での、停留点は $(2s/3,2s/3)$ ただ一つであることが分かる)。

Δ に境界 $\partial\Delta$ を合わせた閉包 $\overline{\Delta}$ は、$\mathbf{R}^2$ の有界閉集合なので、連続関数 f の $\overline{\Delta}$ における最大値が存在する。$f>0$ in Δ, $f=0$ on $\partial\Delta$ であるから、この最大値は、f の Δ における最大値である。特に f は、Δ で最大値を取ることが分かる。最大値はもちろん極値であり、その点 (a,b) は停留点、すなわち $\nabla f(a,b)=0$ が成り立つ。上で得た 4 つの停留点のうち、Δ に含まれるものは $(2s/3,2s/3)$ だけであるから、f の最大値は、$(a,b)=(2s/3,2s/3)$ のときの値 $f(2s/3,2s/3)=s^4/27$. このとき、$c=2s-(a+b)=2s/3$, すなわち $a=b=c$ となるから、三角形は正三角形である。言い換えると、三角形が 1 辺 $2s/3$ の正三角形のとき、面積は最大値 $\sqrt{s^4/27}=\sqrt{3}s^2/9$ をとる。■

```
set hidden3d
set contour base
set isosamples 50,50
set cntrparam level 10
s=1
splot [0:s] [0:s] (s-x)*(s-y)*(x+y-s)*(x+y>s)
```

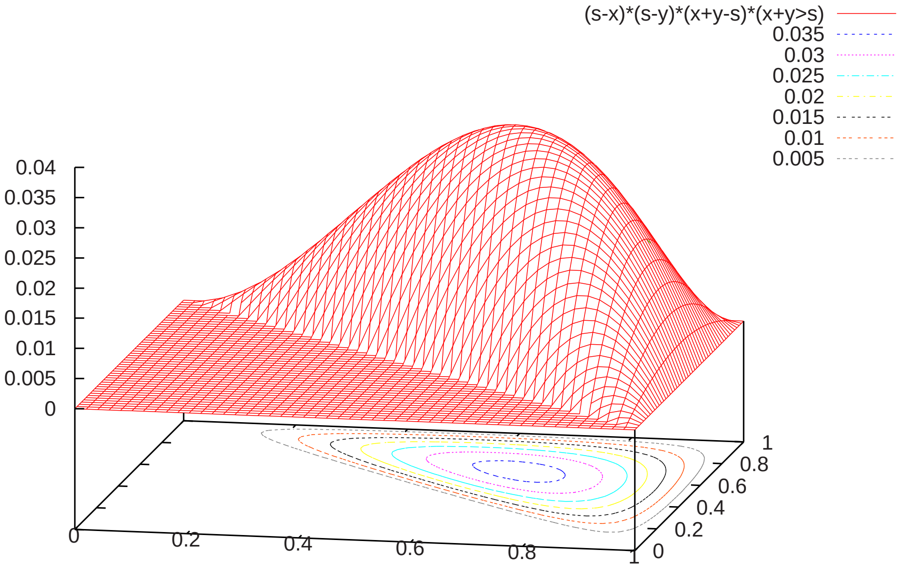


図 3: $a = b = 2s/3\ (= c)$ で最大になる ($s = 1$ の場合のグラフ)

4つの停留点が分かりますか？

- **1** (1) 10 点, (2) 5 点, (3) 5 点.
  - (1) は結構良く出来ていました (過去の年度と比較をしても)。「A が開集合であるとは」のように主語もちゃんとついている人が多くて。授業で時間を使って、学生の理解度が上がる。当たり前のことだけれど、喜ばしい。
  - (3) は、いわゆる ε の具体的な取り方が書いてあるかどうかで点をつけました (「(1) の定義に基づき」ですから、ε が取れることを具体的に言わないと)。結構出来ていました。それなりに時間を投入したせいかな。

- **2** (1) は 5 点ずつで 10 点 (2) は 3+3+2+2.
  うーん、猛烈に出来が悪いなあ。授業ではちゃんと説明したつもりなのだけれど、理解してもらうには、それでは不十分ということか。何かもう一工夫が必要なのか。類題を並べた練習帳でも作るのかな。
  - 「C^∞ だから C^1 でない」なんて書いた人がちらほらいたけれど、C^∞ 級ならば C^1 級ですよ (正方形は長方形だし)。C^1 級の仮定には、2 回以上微分できてはいけない、なんて書いてない。
  - C^1 級のことを「連続で 1 回微分可能」なんてのが多い (こういうミスが多いという、注意そのままだ。定義は真剣にマスターしないとダメです。)。sigh... (ため息)。気を取り直して繰り返すと、「1 回偏微分可能で、もとの関数とすべての 1 階偏導関数が連続」ということです。2 変数関数 $f = f(x, y)$ だったら、f_x と f_y が存在して、f と f_x と f_y が連続ということ。
  - $(0, 0)$ で偏微分可能というのは、偏微分係数 $f_x(0, 0)$ と $f_x(0, 0)$ が存在するということなのだけれど、$f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$ を示して、「よって偏微分不可能」という得体のしれない答案が複数あった。なぜ ??! その反対に $f_y(0, 0) = \infty$ と出し

ておいて (これは計算ミスでしょう)、「よって偏微分可能」と書いてあるのもありました。$= \infty$ は発散で、極限が存在したことにはなりません！

- f が C^1 級とは、「f が全微分可能かつ f' が連続」というのがあって、これは 1 変数と誤解している可能性が高く、f' が連続とはどういう意味かも分からないのだけど (授業で多変数関数について、f' を写像として扱ったことはありません)、ウソとも言えないので、正解としておきました。
- 「Ω で全微分可能とは、各点で全微分可能ということ」と言うのはウソではないですが、質問に答えているとは言いがたいので (1 点で全微分可能ってどういうことだ？)、1 点としました。
- f が $(0,0)$ で連続とは、$f(x,y) \to 0$ ではなくて、$f(x,y) \to f(0,0)$, 言い換えると $|f(x,y) - f(0,0)| \to 0$ なのだけれど、$f(0,0)$ を引くことを忘れている答案がちらほら。
- $|f(x,y) - f(0,0)|$ が 0 に収束しないことを示すのに、

$$|f(x,y) - f(0,0)| \le \cdots \le \cdots \le \text{何か式}$$

として、何か式 が 0 に収束しないことを証明している人がいましたが、不等式評価してから、0 に収束しないことを示しても、$|f(x,y) - f(0,0)|$ については何も分かりません。大きい奴が 0 に収束すれば、小さい方も 0 に収束するのは確かだけれど。

- **3** は (1) 5 点, (2) 5 点, (3) は 10 点。
  - 結構出来ている人がいました (こういうのは得意なんだな)。
  - 間違えている人も多いけれど、この問題は一度きちんと自力で解けるまで粘ってみる価値のある問題です。自分の間違いの理由を理解し、納得ができると、きっと自信がつくと思います。
  - 何でこんなことをやらされるか、今一つピンと来ない人が多いと思うけれど (何で計算するのか全く疑問を感じないというのならば、それはそれで問題だ)、ラプラシアンは超重要で、その極座標表示も超重要なのですね。数学も、必要があって生まれてくる場合が大半なのだけど、学ぶときは「順番に」やるのが普通で、何の役に立つのか見えにくい場合が多くて、時々つらくなることがあります。ラプラシアンの活躍は約 1 年ちょっと後の「微分方程式 2」まで待って下さい (そのときにやればいいじゃないか、という意見もありそうだけれど、「微分方程式 2」も忙しいし、少し面倒だからと言う理由で今それを避けるのも違うでしょう。そうそう、3 次元ラプラシアンの極座標表示というのがあって、それははるかに面倒です。それから n 次元ラプラシアンの…切実に必要だからやる人がいるのですね。)。
- **4** は (1) 5 点, (2) 5 点, (3) 10 点, (4) はおまけ
  - 計算ミス自身はしかたがないが、Hesse 行列が非対称になったりしたら「おかしい」と気付いて欲しい。

– (3) で方程式解けない人がいるけれど…こういう連立代数方程式は、僕自身は高校数学の問題集でそれなりに練習した覚えがあるのだけど、今はやらないのかな。今回のは素直に未知数を消去するだけなのに。練習問題をあげておいたわけで、不得意の自覚がある人は自習しておいてね。ロジックが狂っている人が少しいました。そのせいで解が 1 つになったり、4 つになったり。

– 固有値を計算して、その符号が分からない人もいる。うーん。$\sqrt{}$ くらい近似値求めることができて欲しいし、2 乗して比較することだって出来るわけでしょう ($5 > \sqrt{10}$ の証明は簡単ですよね — $5^2 > 10$ なのだから)。

– 行列式の値を計算して正値とか、負値とかやっている人がいます。どうも勘違いしている人が多いようです。固有値がすべて正であるのが正値、固有値がすべて負であるのが負値、固有値に正のもの負のものがあるのが不定符号です。1 つの行列式の値だけで判定できるのは不定符号かどうかだけです (それも 2 次元の特殊性を使っています。例えば 3 次元で、固有値に正のものが 1 つ、負のものが 2 つある場合、不定符号ですが、行列式の値は 3 数の積で正です。)。

– (4) のような問題は初めて出すので (授業中に問として出したことはある)、出来ないかな、と思ったのだけれど、出来た人が結構いました。僕の解答例よりも良い答があって、ちょっと嬉しい。

- **5** は (1) 10 点, (2) 10 点, (3) はおまけ

– (1) について。完璧な記憶は難しいので、丸暗記を目指して失敗した人は多いです。定理なのに、仮定と結論の境目がなかったり (仮定だけの定理なんてないでしょう？)。耳にタコかもしれないけれど、結局は内容を理解するよう努力するのが近道です。これだけは外せない骨格だというのも授業で説明したはずで、

$$\det F_y(a,b) \neq 0 \quad (\text{その他細かい条件}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} F(x,y)=0 \text{ は } y=\varphi(x) \text{ と解ける} \\ (\text{あるいは } F(x,y)=0 \text{ の陰関数 } y=\varphi(x) \text{ が存} \end{array}$$

というものですね。この骨格がなかったり、曲がっていたりするのはダメです。存在定理だからそれが分かるように書くのが重要です (最初から φ があるように書いている人がいて、それは一瞬で×)。F_y でなくて、F_x とした人もちらほら。でも、それでは導関数の公式

$$\varphi'(x) = -\left(F_y(x,\varphi(x))\right)^{-1} F_x(x,\varphi(x))$$

で、F_y の逆行列を取っていることと合わないでしょう。理解すると、色々なことが芋づる式につながって、長いように見える定理も決して長くないのです。「定義を書け」、「定理を書け」、と出題するのは暗記を奨励しているようで、実は正反対のこと「早く暗記から脱却しなさい」を要求しているのです。

– (2) について。チェックすべき仮定の中で一番重要なものは (実際に計算してみないと分からないものは)、$F_y(3a/2, 3a/2) \neq 0$ でしょうか。他のことが書いてあっても、これが書いてなければダメだし、逆にこれだけ書いてあれば点があげられます。F_x と間違えたりするのは論外です。

– (3) はおまけの問題だけれど、出来ていないですね。ここで尋ねているのは、陰関数が存在するかどうかであって、陰関数定理の仮定が成立しているかどうかではありません。定理の仮定が成り立たないわけですが、だからといって結論が成り立たないとは断定できません ($P \Longrightarrow Q$ が真であっても、$\neg P \Longrightarrow \neg Q$ が真でないとは限りません)。単に定理の守備範囲外というだけです。グラフを見て、交差しているからダメだ、と気付いて欲しい。陰関数定理の最初にお話があるわけですが、それを理解しているか、です。この曲線は、**デカルトの葉線** (Folium of Descartes) という由緒正しいものですが、来年度は時間をかけて解説しよう、と思っています。

– **6A** は、(1) 5 点, (2) 5 点, (3) 10 点, (4) はおまけ
最後に問題をいじって (3) と (4) をわけて、失敗しました (厳密に言うと (3) が難しくなってしまった)。

– 答案用紙の束の最初の紙で (1) が正答だったが、その後、×が続く⋯。どうも 1. 計算の仕方を覚える, 2. 定理を覚えて理解する, 3. 定義を覚えて理解する, のような優先順位でものを考えているのではないか？と疑われますが、そうだとしたら、それは多分高校生流の考え方からまだ脱却できていないのでしょう。その順番を逆転して下さい。この **6A** は、(1) が解答できなければ、後の計算が出来たとしても、自分が何をやったのかきちんと理解出来ないわけで、とても馬鹿馬鹿しい。

– (4) で N_g が有界閉集合と書いて議論した人が一人だけいた。N_g は閉集合ではある ($\mathbf{R}^n$ 上の連続関数の零点集合だから) けれど、有界ではない (図を見れば想像できる — 何せ双曲線だから)。だから間違いなのだけれど、最大値の存在を示して、その後どう議論するかは理解していたので、半分点をあげました。

ラプラシアンの極座標表示

(1) $$f_{xx}+f_{yy}=g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$$

の証明を講義ノートから抜粋。

方法 1　右辺を計算していって左辺に等しいことを示す、という方針で計算してみよう。まず $g_r=f_x x_r+f_y y_r$ より

$$\begin{aligned}
g_r &= f_x\cos\theta+f_y\sin\theta,\\
g_{rr} &= \frac{\partial}{\partial r}g_r=\frac{\partial}{\partial r}(f_x x_r+f_y y_r)=\frac{\partial}{\partial r}f_x\cdot x_r+f_x\frac{\partial}{\partial r}x_r+\frac{\partial}{\partial r}f_y\cdot y_r+f_y\frac{\partial}{\partial r}y_r\\
&=(f_{xx}x_r+f_{xy}y_r)x_r+f_x x_{rr}+(f_{yx}x_r+f_{yy}y_r)y_r+f_y y_{rr}\\
&=f_{xx}(x_r)^2+(f_{xy}+f_{yx})x_r y_r+f_{yy}(y_r)^2+f_x x_{rr}+f_y y_{rr}.
\end{aligned}$$

$x_r=\cos\theta$, $y_r=\sin\theta$ より $x_{rr}=y_{rr}=0$ が導かれること、また f が C^2 級であれば $f_{xy}=f_{yx}$ であることに注意すると、

$$g_{rr}=f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta.$$

次に $g_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta$ より

$$
\begin{aligned}
g_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta} g_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}(f_x x_\theta + f_y y_\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f_x \cdot x_\theta + f_x \frac{\partial}{\partial\theta} x_\theta + \frac{\partial}{\partial\theta} f_y \cdot y_\theta + f_y \frac{\partial}{\partial\theta} y_\theta \\
&= (f_{xx} x_\theta + f_{xy} y_\theta) x_\theta + f_x x_{\theta\theta} + (f_{yx} x_\theta + f_{yy} y_\theta) y_\theta + f_y y_{\theta\theta} \\
&= f_{xx}(x_\theta)^2 + (f_{xy} + f_{yx}) x_\theta y_\theta + f_{yy}(y_\theta)^2 + f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta}.
\end{aligned}
$$

$x_\theta = -r\sin\theta$, $y_\theta = r\cos\theta$ より

$$
x_{\theta\theta} = -r\cos\theta, \quad y_{\theta\theta} = -r\sin\theta
$$

が導かれること、また f が C^2 級であれば $f_{xy} = f_{yx}$ であることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
g_{\theta\theta} &= f_{xx}(-r\sin\theta)^2 + 2f_{xy}(-r\sin\theta \cdot r\cos\theta) + f_{yy}(r\cos\theta)^2 + f_x(-r\cos\theta) + f_y(-r\sin\theta) \\
&= f_{xx} r^2 \sin^2\theta - 2f_{xy} r^2 \sin\theta\cos\theta + f_{yy} r^2 \cos^2\theta - (f_x r\cos\theta + f_y r\sin\theta)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta} &= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta + \frac{1}{r}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\left[f_{xx} r^2 \sin^2\theta - 2f_{xy} r^2 \sin\theta\cos\theta + f_{yy} r^2 \cos^2\theta - (f_x r\cos\theta + f_y r\sin\theta) \right] \\
&= f_{xx}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + f_{yy}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = f_{xx} + f_{yy}.
\end{aligned}
$$

方法 2　(1) の右辺を計算する。方法 1 と同様に計算すると、

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= g_{rr}(r_x)^2 + (g_{r\theta} + g_{\theta r}) r_x \theta_x + g_{\theta\theta}(\theta_x)^2 + g_r r_{xx} + g_\theta \theta_{xx}, \\
f_{yy} &= g_{rr}(r_y)^2 + (g_{r\theta} + g_{\theta r}) r_y \theta_y + g_{\theta\theta}(\theta_y)^2 + g_r r_{yy} + g_\theta \theta_{yy}
\end{aligned}
$$

となる。r_{xx}, θ_{xx}, r_{yy}, θ_{yy} は何か？

$$
r_x = \cos\theta, \quad r_y = \sin\theta, \quad \theta_x = \frac{-\sin\theta}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}
$$

から一目で計算というわけには行かない。また合成関数の微分法を使って

$$
\begin{aligned}
r_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} r_x = \frac{\partial}{\partial x}\cos\theta = \frac{\partial}{\partial r}\cos\theta \cdot r_x + \frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta \cdot \theta_x \\
&= 0 + (-\sin\theta)\frac{-\sin\theta}{r} = \frac{\sin^2\theta}{r}, \\
r_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} r_y = \frac{\partial}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial}{\partial r}\sin\theta \cdot r_y + \frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta \cdot \theta_y \\
&= 0 + (\cos\theta)\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\cos^2\theta}{r}, \\
\theta_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\theta_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-\sin\theta}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{-\sin\theta}{r} \cdot r_x + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{-\sin\theta}{r} \cdot \theta_x \\
&= \frac{\sin\theta}{r^2}\cos\theta + \frac{-\cos\theta}{r} \cdot \frac{-\sin\theta}{r} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}, \\
\theta_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\theta_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos\theta}{r} \cdot r_y + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r} \cdot \theta_y \\
&= \frac{-\cos\theta}{r^2}\sin\theta + \frac{-\sin\theta}{r} \cdot \frac{\cos\theta}{r} = \frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r^2}.
\end{aligned}
$$

これから

$$(r_x)^2+(r_y)^2=1,\quad r_x\theta_x+r_y\theta_y=0,\quad (\theta_x)^2+(\theta_y)^2=\frac{1}{r^2},\quad r_{xx}+r_{yy}=\frac{1}{r},\quad \theta_{xx}+\theta_{yy}=0$$

であるから、

$$\begin{aligned}
f_{xx}+f_{yy}&=g_{rr}[(r_x)^2+(r_y)^2]+(g_{r\theta}+g_{\theta r})(r_x\theta_x+r_y\theta_y)+g_{\theta\theta}[(\theta_x)^2+(\theta_y)^2]\\
&\quad+g_r(r_{xx}+r_{yy})+g_\theta(\theta_{xx}+\theta_{yy})\\
&=g_{rr}\cdot 1+(g_{r\theta}+g_{\theta r})0+g_{\theta\theta}\frac{1}{r^2}+g_r\frac{1}{r}+g_\theta\cdot 0\\
&=g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}.
\end{aligned}$$

(これは大変、ということで少しだけ工夫したのが次の方法である。)

方法 3　やはり (1) の右辺を変形していく。以下説明する方法は本質的には方法 2 と同じであるが、こちらの方が間違いにくいと思われる。

既に見た

$$f_x=g_r\cos\theta-\frac{g_\theta\sin\theta}{r},\quad f_y=g_r\sin\theta+\frac{g_\theta\cos\theta}{r}$$

という公式から、関数の x, y に関する偏微分を r, θ に関する偏微分で表現する公式

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

を得る。これを使って、

$$\begin{aligned}
f_{xx}&=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 g=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta g_r-\frac{\sin\theta}{r}g_\theta\right)\\
&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta g_r-\frac{\sin\theta}{r}g_\theta\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta g_r-\frac{\sin\theta}{r}g_\theta\right)\\
&=\cos\theta\left(\cos\theta g_{rr}+\frac{\sin\theta}{r^2}g_\theta-\frac{\sin\theta}{r}g_{\theta r}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta g_r+\cos\theta g_{r\theta}-\frac{\cos\theta}{r}g_\theta-\frac{\sin\theta}{r}g_{\theta\theta}\right)\\
&=g_{rr}\cos^2\theta-\frac{(g_{r\theta}+g_{\theta r})\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{g_{\theta\theta}\sin^2\theta}{r^2}+\frac{g_r\sin^2\theta}{r}+\frac{2g_\theta\sin\theta\cos\theta}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{yy}&=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 g=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta g_r+\frac{\cos\theta}{r}g_\theta\right)\\
&=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta g_r+\frac{\cos\theta}{r}g_\theta\right)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta g_r+\frac{\cos\theta}{r}g_\theta\right)\\
&=\sin\theta\left(\sin\theta g_{rr}-\frac{\cos\theta}{r^2}g_\theta+\frac{\cos\theta}{r}g_{\theta r}\right)+\frac{\cos\theta}{r}\left(\cos\theta g_r+\sin\theta g_{r\theta}-\frac{\sin\theta}{r}g_\theta+\frac{\cos\theta}{r}g_{\theta\theta}\right)\\
&=g_{rr}\sin^2\theta+\frac{(g_{r\theta}+g_{\theta r})\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{g_{\theta\theta}\cos^2\theta}{r^2}+\frac{g_r\cos^2\theta}{r}-\frac{2g_\theta\sin\theta\cos\theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

(式は長いけれど、途中で迷うところがないと思われる。こういうのが「工夫」であろう。)

ゆえに

$$f_{xx}+f_{yy}=g_{rr}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+g_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r^2}+g_r\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r}=g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}.$$

2　2002年度

2.1　2002年度 解析概論I, 解析概論演習I 試験問題

(2002年7月29日施行)
次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。6 は 6A, 6B, 6C のうちから一問を選択して解答せよ。

1　(1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を記せ。(4) 次の A_1, A_2 の各々につき、簡単に図示し、それが有界集合かどうか、開集合かどうか、閉集合かどうか、調べよ。$A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2/4 - y^2/9 < 1\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^4 + y^4 = 1\}$.

2　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω から $\mathbf{R}^m$ への関数について、次の 4 つの条件の関係を説明せよ。(a) Ω で連続, (b) Ω で各変数でつき偏微分可能, (c) Ω で C^1 級, (d) Ω で全微分可能.
(2) $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を次式で定義するとき、f が条件 (a)〜(d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & ((x, y, z) \neq (0, 0, 0)) \\ 0 & ((x, y, z) = (0, 0, 0)). \end{cases}$$

3　c を正定数、$F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を C^2 級の関数とするとき、$u\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ を

$$u(x, y, z, t) = \frac{F(r - ct)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

で定義すると、u は $\mathbf{R}^4$ 全体で次式を満たすことを示せ。

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right).$$

4　$f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ の極値を求めよ。

5　点 (x, y, z) が方程式 $\dfrac{(x-1)^2}{1} + \dfrac{(y-2)^2}{4} + \dfrac{(z-3)^2}{9} = 1$ で表わされる $\mathbf{R}^3$ の部分集合 E の上を動くときの、関数 $f(x, y, z) = x + y + z$ の値について考える。
(1) f は E で最大値、最小値を持つことを示せ。(2) f の E における最大値、最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ。(3) f が (x_0, y_0, z_0) で最大値 k を取るとき、方程式 $x+y+z = k$ で表わされる集合と E はどういう関係にあるか。

6A　平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x, y)$ が与えられているとき、$g(r, \theta) = f(x, y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r + \dfrac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$.

6B　地球の表面上にある 2 点の緯度経度が分かっているときに、その 2 点間の (表面に沿っての) 道のりの求め方を説明せよ。(ただし地球は球であると考える。)

6C Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$, $g\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ をともに C^1 級の関数とする。$F\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を $F(x) = (f(x), g(x))$ (内積) で定義するとき、$F'(x)$ を求めよ。

2.2 2002 年度 解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題 解説

1 (1)〜(3) について主語がないものは減点 (講義ノートの「期末試験の採点から」を見よ)。

(1) $A \subset \mathbf{R}^n$ が有界であるとは、

$$\exists R \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \le R$$

が成り立つことをいう。

(2) $A \subset \mathbf{R}^n$ が開集合であるとは、

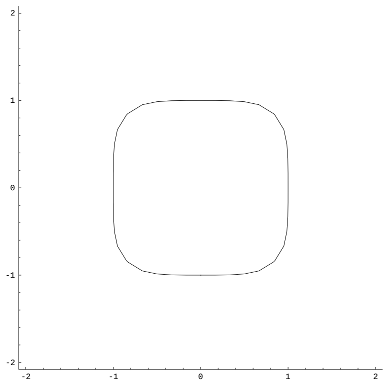
$$\forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(a; \varepsilon) \subset A$$

が成り立つことをいう。

(3) $A \subset \mathbf{R}^n$ が閉集合であるとは、A の補集合 $\mathbf{R}^n \setminus A$ が開集合であることをいう。

(4) A_1 は双曲線 $x^2/4 - y^2/9 = 1$ (2 本の曲線) ではさまれる (言い換えると、原点を含む) 領域 (境界含まず) で、有界ではなく、開集合であり、閉集合ではない。(境界が 2 直線 $x/2 \pm y/3 = 0$ を漸近線とする双曲線であることは良いとして、原点を含まない 2 つの領域と間違えた人が結構いた。$(x, y) = (0, 0)$ を代入して符号を調べれば簡単に分かると思うのだが…)

A_2 は単位円の 4 角を出っ張らせた (正方形の 4 角を丸めたという方が分かりよい？) 感じの閉曲線で、有界であり、開集合ではなく、閉集合である。



これを $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ で尖った曲線にしている人が実に多かった[2](少し減点 — もっともこのミスをしても、後には響かない)。■

[2] $F(x, y) = x^4 + y^4 - 1$ の零点集合上、$\nabla F \neq 0$ が成り立つので、尖るはずはない。

2 出来が悪く驚いている。特に (1) は

$$\begin{array}{ccccc} \text{(c) } C^1 \text{ 級} & \Longrightarrow & \text{(d) 全微分可能} & \Longrightarrow & \text{(a) 連続} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{(b) 各変数につき偏微分可能} & & \end{array}$$

というだけのことで、丸暗記するにしても負担がないはずなのに (丸暗記を推奨しているわけではない)、ひどいできだった。これが理解できていないと、この辺の理論構成がまったくわけが分からないものになっているのだろう (教師としてとても気が重い⋯)。

(1) (c) ならば、(a), (b), (d) いずれも成立。(d) ならば、(a), (b) ともに成立。それ以外は成り立たない (反例がある)。

(2) f は (a), (b) を満たすが、(c), (d) を満たさない。(a), (b) を満たすこと、(d) が成り立たないことを確かめれば、(c) が成り立たないことはすぐわかる (一般に (c) $\Longrightarrow$ (d) なので)。

まず $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ において、f は分母が 0 にならない有理関数なので、C^∞ 級である。ゆえに原点でどうなるかを調べればよい。(a) について、$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ に対して、

$$|f(x,y,z) - f(0,0,0)| = \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = |x| \frac{|yz|}{x^2+y^2+z^2} \leq |x|$$

なので、$(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ のとき、$f(x, y, z) \to f(0, 0, 0)$. ゆえに f は $(0, 0, 0)$ で連続。ここで、

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 + z^2 \geq 2\sqrt{y^2 z^2} = 2|yz|$$

から

$$\frac{|yz|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

となることを用いた (これをきちんと書いてくれた人は少かった)。あるいは、極座標を用いて、次のようにしてもよい。

$$\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{r\sin\theta\cos\phi \cdot r\sin\theta\sin\phi \cdot r\cos\theta}{(r\sin\theta\cos\phi)^2 + (r\sin\theta\sin\phi)^2 + (r\cos\theta)^2} = r\cos\theta\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi$$

となることから

$$|f(x,y,z)| \leq |r\cos\theta\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi| \leq r$$

ゆえに $(x, y, z) \to 0$ とするとき ($r \to 0$ なので)

$$f(x,y,z) \to 0 = f(0,0,0)$$

としても良い。f が原点で各変数について偏微分可能であることを示すのは簡単なのでここでは省略。最後に f が原点で全微分可能でないことを示そう。

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - f_x(0,0,0)x - f_y(0,0,0)y - f_z(0,0,0)z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

が成り立たないことを示すことになる。$f(0,0,0)=0$, $f_x(0,0,0)=0$, $f_y(0,0,0)=0$, $f_z(0,0,0)=0$ なので、

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0$$

が成り立つかどうか、ということである。実は左辺の極限は存在せず[3]、この式は成り立たないのだが、それを確かめるには、

$$(x,y,z) = t(1,k,\ell)$$

とおいて、$t\to 0$ としたときの極限を調べるとか (2 変数で直線 $y=kx$ にそって原点に近づけるときどうなるか調べることの真似)、極座標を使うとか、色々やり方がある。■

3 合成関数の微分法 (チェイン・ルール) を用いて計算するだけ。

4

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \dfrac{1}{x^2} & x - \dfrac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

なので、$f'(x,y)=0$ を満たす点は連立 1 次方程式

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad x = \frac{1}{y^2}$$

の解となる。y を消去して、$x=x^4$. これから $x(x-1)(x^2+x+1)=0$. 実数解は $x=0,1$ だが、$x=0$ は元の方程式を満たさないので $x=1$ だけが解。対応する y は $y=\dfrac{1}{1^2}=1$. ゆえに $(x,y)=(1,1)$. f の Hesse 行列は

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

で、$(x,y)=(1,1)$ では $H=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. これは正定値である (固有値を求めて、1, 3 は両方とも正と言っても良いし、主座小行列式の値 2, $2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 3$ がみな正と言ってもよい)。ゆえに f は $(1,1)$ で極小となる。つまり「$(x,y)=(1,1)$ で f は極小値 3 を取る。」■

5 (この問題は図形的「直観」で、接するときが最大最小を与えると分かるので、未定乗数法を使わなくても答は出る。)

(1) E は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であり、f は連続であるから、「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合上の実数値連続関数は最大値・最小値を持つ」という定理により、f は E 上最大値を持つことが分かる。

[3] 分母分子がともに 3 次同次式であるから、慣れている人には明らかである。直感的に言うと、微分をするたびに、相対的に分子の次数が低くなって、性質が悪くなっていくわけ。余談だが、最初は $f(x,y,z)=(xyz)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ という関数で問題を作ろうかとも考えていた。

(2) $g(x,y,z) := \dfrac{(x-1)^2}{1} + \dfrac{(y-2)^2}{4} + \dfrac{(z-3)^2}{9} - 1$ とおくと、$\nabla g(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x-1 \\ \dfrac{y-2}{4} \\ \dfrac{z-3}{9}\end{pmatrix}$. これは E の上で 0 にならない (g が 0 になるには、$(x,y,z)=(1,2,3)$ となることが必要十分だが、この点は E に含まれない)。ゆえに E 上の f の極値は未定乗数法で求まる。(x,y,z) が極値点であるための必要十分条件は、

$$\exists\lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z), \quad g(x,y,z) = 0$$

で、最初の式から $x-1 = \dfrac{1}{2\lambda}$, $y-2 = \dfrac{4}{2\lambda}$, $z-3 = \dfrac{9}{2\lambda}$ が得られ、これを 2 番目の式 $g(x,y,z)=0$ に代入すると、$2\lambda = \pm\sqrt{14}$. 極値は

$$f\left(1+\frac{1}{\sqrt{14}}, 2+\frac{4}{\sqrt{14}}, 3+\frac{9}{\sqrt{14}},\right) = 6+\sqrt{14}, \quad f\left(1-\frac{1}{\sqrt{14}}, 2-\frac{4}{\sqrt{14}}, 3-\frac{9}{\sqrt{14}},\right) = 6-\sqrt{14}.$$

最大値と最小値は (1) で存在が分かっていて、それは当然極値であり、極値はこの 2 つしかないので、最大値は $6+\sqrt{14}$, 最小値は $6-\sqrt{14}$.

(3) $x+y+z=k$ は (x_0,y_0,z_0) で E に接する。■

6A 再履修者向けの問題 (講義ノートの「期末試験の採点から」を見よ)。出て来た間違いも講義ノートで説明してあるものが多い。以下は余談。ヤコビ行列の定義が頭に入っていなくて、

$$r_x = \cos\theta, \quad r_y = -\frac{\sin\theta}{r}$$

なんてミスする人が出て来るが、物理的に考えると、次元がつりあっていなくて、明らかに変だよね (長さの次元のある量を長さの次元のある量で微分したら、無次元量になるはず — r_y の方が間違いだ)。

6B (誰も解いてくれなかった。この手の問題は、大昔ならば球面三角法として、講義もされたのだろうけれど、現在ではベクトルの計算で簡単にできることとして、逆にあまり説明されないのかも… 参考まで) 極座標と直交座標 (デカルト座標) の関係式を理解していれば、緯度、経度から直交座標を求める式は導けるはず (省略)。後は、地球の中心から二点 $\vec{x}$, $\vec{y}$ を見込む角 θ を $\cos\theta = \dfrac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$ で算出して、道のり $= R\theta$ (R は地球の半径) とすれば良い。■

6C 結果のみ書いておくと (確認は素朴な計算なので簡単)、(A の転置を A^T で表わすことにして)

$$F'(x) = g(x)^T f'(x) + f(x)^T g'(x). \blacksquare$$

3　2001年度

3.1　2001年度 解析概論I, 解析概論演習I 試験問題

(2001年7月23日施行)
次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。

1　(1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(3) 次の $\mathbf{R}^2$ の部分集合の各々につき簡単に図示し、それが有界集合か、開集合か、それぞれ判別せよ (理由も簡単に記せ)。(i) $A_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \le 1\}$. (ii) $A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}$.

2　$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \ne (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ (ヒント: 場合分けが必要である)。(2) ∇f は原点で連続であるかどうか調べよ。(3) f は原点で全微分可能かどうか調べよ。

3　$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 2y^2$ で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) f のグラフ $z = f(x,y)$ の点 $(a, b, f(a,b))$ における接平面の方程式を求めよ。(2) $\nabla f(x,y) = 0$ となる点 (x,y) を求めよ。(3) f の点 (x,y) における Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(4) f の極値を求めよ。

4　平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta) = f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r}g_r + \dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$.

5　C^2 級の関数 $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ に対して、$u\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ で定義する。このとき以下の問に答えよ。
(1) $u'(x,y)$ を f を用いて表せ。(2) $\triangle u := u_{xx} + u_{yy}$ を、f を用いて表せ。(3) u が $\triangle u(x,y) = 0$ $((x,y) \ne 0)$ を満たしているとき、f を求めよ。

6　$\mathbf{R}^3$ において、曲面 $xyz = 1$ 上の点で原点に最も近いものを求めよ。

3.2　2001 年度 解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題 解答

1　(1) $A \subset \mathbf{R}^n$ が有界集合とは、$\exists R \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \le R$ が成り立つことである。

(2) $A \subset \mathbf{R}^n$ が開集合とは、$\forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つことである。

(3) (i) 有界集合である ($\vec{x} = (x,y) \in A_1$ に対して $\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2/9+y^2/9} \le 3\sqrt{x^2/4+y^2/9} \le 3 \cdot 1 = 3$)。開集合ではない ($\vec{x} = (2,0) \in A_1$ だが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(\vec{x};\varepsilon) \not\subset A_1$. 実際 $(2+\varepsilon/2, 0) \in B(\vec{x};\varepsilon)$ だが $(2+\varepsilon/2,0) \notin A_1$)。(ii) 有界集合ではない ($\vec{x}_n \overset{\text{def.}}{=} (\sqrt{n+1}, \sqrt{n}) \in A_n$ であるが、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|\vec{x}_n\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n+1} = \infty$)。開集合ではない ($\vec{x} \overset{\text{def.}}{=} (1,0) \in A_2$ だが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(\vec{x};\varepsilon) \not\subset A_2$. 実際 $(1+\varepsilon/2,0) \in B(\vec{x};\varepsilon)$ だが、$(1+\varepsilon/2,0) \notin A_2$)。■

2　(1) $(x,y) \ne (0,0)$ であるとき、

$$f_x(x,y) = y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{(x^2+y^2)\cdot(2x) - (2x)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{(x^2+y^2)\cdot(-2y) - (2y)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} y(x^4+4x^2y^2-y^4) \\ x(x^4-4x^2y^2-y^4) \end{pmatrix}.$$

一方 $(x,y) = (0,0)$ においては、

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

より

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)$(x,y) \to (0,0)$ のとき $\nabla f(x,y) \to \nabla f(0,0)$. 実際

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| \le |y| \frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} \le 2|y| \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|y| \to 0 \quad ((x,y) \to (0,0)),$$

$$|f_y(x,y) - f_y(0,0)| \le |x| \frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} \le 2|x| \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|x| \to 0 \quad ((x,y) \to (0,0))$$

だから。ゆえに ∇f は原点で連続である。

(3) 上で調べたことから f は C^1 級であるから全微分可能である。■

3 (1) $\nabla f(x,y) = {}^t(2x-2y^2, 4y-4xy)$ であるから、接平面の公式 $z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ に代入して

$$z - (a^2 - 2ab^2 + 2b^2) = (2a-2b^2)(x-a) + (4b-4ab)(y-b).$$

整理して

$$z = 2(a-b^2)x + 4b(1-a)y - a^2 - 2b^2 + 4ab^2.$$

(2) $(0,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ の 3 点。(3) $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & 4(1-x) \end{pmatrix}$. (4) $(x,y)=(0,0)$ で極小値 0. ■

4 (講義ノート参照)

5 (1) $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと、$r_x = x/\sqrt{x^2+y^2}$, $r_y = y/\sqrt{x^2+y^2}$. $u(x,y) = f(r)$ であるから、

$$u'(x,y) = (u_x(x,y)\ u_y(x,y)) = (f'(r)r_x\ f'(r)r_y) = \frac{f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\ y).$$

(2) (実は第 4 問を使っても解ける)

$$r_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2)^{-1/2}\right) = 1\cdot(x^2+y^2)^{-1/2} + x\cdot(-1/2)(x^2+y^2)^{-3/2}(2x) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

であるから、

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)r_x\right) = f''(r)r_x\cdot r_x + f'(r)\cdot r_{xx} = f''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

同様にして

$$u_{yy}(x,y) = f''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(r)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

ゆえに

$$\triangle u(x,y) = f''(r)\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(r)\frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = f''(r) + \frac{f'(r)}{r} = f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(3) $f''(r) + f'(r)/r = 0$ において、$g(r) = f'(r)$ とおくと、$g'(r)/g(r) = -1/r$. 積分して

$$\log|g(r)| = -\log r + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

$C = \log C'$ とおくと、C' は正の任意定数で、$\log|g(r)| = \log(C'/r)$. ゆえに $g(r) = \pm C'/r = C''/r$ (C'' は任意定数). これから $f(r) = A\log r + B$ (A, B は任意定数)。■

6 $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xyz-1$ とおく。講義の例と同様の考察で条件 $g(x,y,z)=0$ の下での f の最小値が存在することが示される (省略)。

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (g(x,y,z)=0 \text{ なる任意の } (x,y,z))$$

であるから、条件 $g(x,y,z)=0$ の下での f の極値は Lagrange の未定乗数法で求まる。$F(x,y,z,\lambda) \overset{\text{def.}}{=} f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$ とおくと、$\nabla F(x,y,z,\lambda)=0$ から $(x,y,z,\lambda)=(-1,-1,1,2)$, $(-1,1,-1,2)$, $(1,-1,-1,2)$, $(1,1,1,2)$. いずれの場合も $f(x,y,z)=3$ であるから、これは f の最小値である。ゆえに曲面 $g(x,y,z)=0$ 上の点と原点との距離 $(=\sqrt{f(x,y,z)})$ の最小値は $\sqrt{3}$.
■ (**別解** 3 正数についての「相加平均 $\geq$ 相乗平均」という不等式から $x^2+y^2+z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3$, 等号 $\Leftrightarrow x^2=y^2=z^2 \Leftrightarrow (x,y,z)=(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$) ■

3.3 2001 年度 解析概論 I, 解析概論演習 I 追試験問題

(2001 年 7 月 31 日施行)
次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。

1 (1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を記せ。(3) 次の $\mathbf{R}^2$ の部分集合を簡単に図示し、それが有界集合かどうか、閉集合かどうか、答えよ (理由も簡単に記せ)。(i) $A_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; 1<xy<2\}$. (ii) $A_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^4+y^4=1\}$.

2 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) f は原点で連続ではないことを示せ。(2) f は原点で偏微分可能かどうか調べよ。(3) f は原点で全微分可能かどうか答えよ (理由も述べよ)。

3 $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-zx-z$ で定めるとき、以下の問に答えよ。(1) $f'(x,y,z)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y,z)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

4 $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x+y^2}$ で定まる関数 $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ について、以下の問に答えよ。
(1) f の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ。(2) Taylor の定理を用いて

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-P(x,y)|}{x^2+y^2} = 0$$

を満たす多項式 $P(x,y)$ のうちで次数最低のものを求めよ。

5　(1) 陰関数定理を記せ。
(2) $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $F(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^3 - 3xy + y^3 = 0$ で定義するとき、以下の問に答えよ。

(i) $F(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) の十分近くで、$F(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在を陰関数定理で保証するための、(a,b) についての条件 (なるべく簡単なもの) を求めよ。

(ii) (i) の条件が成り立つとき、陰関数定理で存在が保証された陰関数 φ に対して $\varphi'(x_0)=0$ となる点 x_0 を求め、$\varphi''(x_0)$ の符号を調べて、φ が極値を取るかどうか答えよ。

6　条件 $x^2+y^2-1=0$ のもとで、関数 $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ の最大値、最小値を求めよ。
(**注意:** どういう手段で解いても良い。)

4　2000 年度

4.1　2000 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題

(2000 年 7 月 17 日施行)
次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。A, B 二つあるものについては一方のみを選択して解答せよ。

1　(1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を記せ。(3) 次の各集合につき、それが有界閉集合かどうか判別せよ (理由も簡単に記せ)。(i) $A_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2\le 1\}$. (ii) $A_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2-y^2=1\}$. (iii) $A_3=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$.

2A　正定数 p に対して、$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を $f(x)=\begin{cases} |x|^p \sin\dfrac{1}{x} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$ で定義するとき、以下の問に答えよ。(1) f は $\mathbf{R}$ で連続か？(2) f は $\mathbf{R}$ で微分可能か？(3) f は $\mathbf{R}$ で C^1 級か？

2B　次式で定義される関数 $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ について、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

(1) 原点で連続であるかどうか調べよ。 (2) 原点での偏微分係数を求めよ。(3) 原点で全微分可能であるかどうか調べよ。

3　次式で定義される関数 $U\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ が $U_t=U_{xx}$ を満たすことを示せ。

$$U(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

4　平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta) = f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r}g_r + \dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$.

5　Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を C^2 級の関数、$a \in \Omega$, $h \in \mathbf{R}^n$ とする。(1) $\|h\|$ が十分に小さければ $\{a + th; t \in (-1,1)\} \subset \Omega$ となることを示せ。(2) $\|h\|$ が (1) の条件を満たすほど十分小さい場合に、$F(t) = f(a+th)$ $(t \in (-1,1))$ とおいて $F\colon (-1,1) \to \mathbf{R}$ を定義したとき、$F'(t)$, $F''(t)$ を求めよ。(3) C^2 級の関数に対する Taylor 展開の定理を書け。

6　$\mathbf{R}^2$ を定義域とする関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ について以下の問に答えよ。(1) f のグラフ $z = f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における接平面の方程式を求めよ。 (2) $\nabla f(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めよ。(3) f の極値をすべて求めよ。

4.2　2000 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題 の解答？

1　(1), (2) ともに、定義の書き方がなっていない人が多かった (講義ノートの p.148 付近を見ること)。何が有界集合であるか、何が閉集合であるか、主語が曖昧なものはダメである。なお、主語が $\mathbf{R}^n$ になっている人が結構いた (ひどい勘違いであり、中間点もあげられない[4])。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が有界であるとは、

$$(\exists R \in \mathbf{R}) \quad (\forall x \in A) \quad \|x\| \le R$$

が成り立つことである。

目についた間違い: 「上に有界かつ下に有界」とした人が少なくなかったが、それは $\mathbf{R}$ の部分集合の場合だけしか通用しない定義である。多次元の世界では上限、下限というものはない。

(2) (少し上とは違った書き方をしてみよう) $A \subset \mathbf{R}^n$ について、

$$A \text{ が閉集合} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} A^c \text{ が開集合}. \qquad (\text{ただし } A^c \text{ は } A \text{ の補集合 } \mathbf{R}^n \setminus A \text{ を表わす})$$

目についた間違い: 閉集合であることを、開集合ではないことと勘違いしている

(3) 判別の結果だけ書いておくと、

(i) 有界であり、閉集合である

(ii) 有界でないが、閉集合である

[4]たとえ話をすると、「大学生とは何か」という問に対して、「桂田祐史が大学生であるとは」と書き出すようなものである。不特定の人を表わすもの — 例えば A — を持ち出して「A が大学生であるとは」のような書き出しでないと変でしょ。

(iii) 有界であるが、閉集合ではない

目についた間違い: (iii) について、閉集合であると書いただけの人が何人かいたが、それでは閉集合であるかないか答えたことにならない。それから一点からなる集合は閉集合で (これは正しい)、閉集合の和は閉集合だから (有限個の閉集合ならば真だが、無限個の閉集合の場合はそうではない — つまり、ここがおかしい)、曲線は閉集合という論法を使う人がいたが、もしそれが正しければ、すべての集合は閉集合になってしまうはずである (おかしい)。

2A ($p=2$ の場合に説明したことがあるのだが$\cdots$) まず $\mathbf{R}\setminus\{0\}=\{x\in\mathbf{R}; x\neq 0\}$ で f は何回でも微分出来る。特に連続、微分可能、C^1 級である。それで問題は $x=0$ においてどうか、である。まず連続性は次のようにして分かる。$|\sin(1/x)|\le 1$ から

$$|f(x)|=|x|^p\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le |x|^p\to 0 \quad (x\to 0).$$

ゆえに

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0).$$

次に微分可能性については、

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|^p}{h}\sin\frac{1}{h}$$

が存在するかという問題である。まず $p>1$ の場合は 0 という極限を持つ。$0<p\le 1$ の場合には極限がない。ゆえに $p>1$ の場合のみ微分可能 ($f'(0)=0$)、そうでない場合は微分可能でない。次に C^1 級かどうかについて。まず $p\le 1$ の場合は (微分可能でないのだから) 明らかに C^1 級でない。以下 $p>1$ とする。まず $x>0$ の場合を考えよう。

$$f'(x)=(p-1)x^{p-1}\sin\frac{1}{x}+x^p\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=(p-1)x^{p-1}\sin\frac{1}{x}-x^{p-2}\cos\frac{1}{x}$$

右辺第 1 項は $x\to +0$ のとき 0 に収束するが、右辺第 2 項については、

$$\lim_{x\to+0}x^{p-2}\cos\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & (p>2\ \text{の場合})\\ \text{極限なし} & (1<p\le 2\ \text{の場合})\end{cases}$$

$x<0$ の場合も含めてまとめると、

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\begin{cases}0=f'(0) & (p>2\ \text{の場合})\\ \text{極限なし} & (1<p\le 2\ \text{の場合})\end{cases}$$

ゆえに $p>2$ の場合 f は C^1 級で、$0<p\le 2$ の場合は C^1 級でない。■

2B かなり難しい問題であるが、よく似た $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ という場合を説明しておいたので (講義ノートにも書いてある)、簡単に結果だけ書いておく。

(1) f は不連続である。$y = kx$ とおいて何か書いた人は全員沈没である。それ以外に $\left|\dfrac{y^2}{x}\right| \le |y^2|$ とか、ムチャクチャな計算をしている人が多くて閉口した (本当にそうなると信じているのか？それとも書かないよりは何か書いた方が良いと勘違いしているのか？)

(2) 簡単なはずなのに、出来ている人があまりいなかった (なぜなんだろう？)。ちなみに結果だけ書いておくと $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 0$ である。

(3) 結論は「全微分可能ではない」。理由としては「連続でないから」が簡単だが、

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

でないことを示すという方針でも解ける (分母を x にした人が多かった — もちろん間違い)。この式は (2) の結果を用いると

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{y^2}{x\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

と同値であるが、これが成り立たないことを示すのは難しくない (例えば $y = kx$ とおいてみるのでも OK)。

3　要領よく解ける人、要領は悪いが解ける人、解けない人、様々だった。念のため自己採点できるように途中経過を書いておくと、

$$U_t = U_{xx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \frac{x^2 - 2t}{4t^2}.$$

(計算の要領は悪い人でも、結果が等しくなることが分かっているので、間違いは自分で発見できるはず — 率直に言うと、これは点をあげるための問題。こういうのを解けなかったり、give up するのはちょっとマズイ。試験場に冷房がなくて暑いのはひどいと思うけれど、こういうところは粘って欲しい。)

4

(1) さすがにほとんどの人が出来ていた。

(2) 半分くらいしか出来ていなかった。講義でも説明した「よくあるが、とんでもない間違いである」 $r_x = \dfrac{1}{\cos\theta}$ という答が過去最高の頻度で現れた (教師として残念だ)。それから (これも講義で説明した)

$$(\textbf{これは間違い}) \qquad \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & x_\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

という間違いも 10 人近くあった。ヤコビ行列の定義くらいは間違えないように。「一つの行は一つの関数に対応し、一つの列は一つの変数に対応する」ことはしっかり頭にたたき込んでおくこと。正しくは

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

(3) 結構できていた。チェイン・ルールが分かっているようであれば半分位の中間点はつけた。

5 今年度は陰関数定理を出さないので、何か定理を書けという問題を出したかったので、2 階に限定して Taylor の定理を尋ねてみた。

(1) Ω が開集合なので、$\exists\varepsilon > 0$ s.t. $B(a;\varepsilon) \subset \Omega$. そこで h を $\|h\| < \varepsilon$ となるように取れば、$\forall t \in (-1,1)$ に対して

$$\|(a+th)-a\| = \|th\| = |t|\cdot\|h\| \le 1\cdot\|h\| = \|h\| < \varepsilon$$

なので $a+th \in B(a;\varepsilon)$ (分からない人は、図を描いてみること)、ゆえに $a+th \in \Omega$. 従って $\{a+th; t \in (-1,1)\} \subset \Omega$.

(2) まず 1 階微分は、

$$F'(t) = f'(a+th)h$$

で簡単である。この右辺は行列とベクトルの積の意味なので、順番が大切で、

$$hf'(a+th)$$

と書くとナンセンスになってしまう。2 階については、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ とおいて、

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)h_i h_j$$

6

(1) 答は $z = -3x - 3y$. 解き方としては、接線の方程式 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ の 2 次元版である

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

という公式に $(a,b) = (0,0)$ を代入するというのが一つ。もう一つは

$$F(x,y,z) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x,y) - z$$

とおいて、

$$F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

という公式に $(a,b) = (0,0)$, $c = f(a,b) = f(0,0) = 0$ を代入するというもの。

目立った間違い: 1 次式でない答 (2 次式とか3 次式) を書いた人が結構いたが、それは平面内の直線の方程式を求めろと言う問題の解答に 3 次式を書くようなものである。

(2) $(x,y) = (1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. これはさすがに大半の人が出来ていたが、これを $(x,y) = (\pm1,\pm1)$ と書くのは曖昧である (複号任意なのか、複号同順なのかによって、2 点になるか 4 点になるか変わってしまうので)。

(3) 行列の正値、負値の判定ができない人が多かった。この問題の場合、Hesse 行列は対角行列なので、対角成分が固有値そのものであることに気が付けば (あるいは講義で強調したように、2 次の正方行列は 2 次方程式を解くだけで固有値が求まるのだから、それを実行しても良い)、定義から即答できるはずである。$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ は正値、$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ は不定符号、$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ は負値。ゆえに $(1,1)$ では極小値 $f(1,1)=-4$、$(-1,-1)$ では極大値 $f(-1,-1)=4$ を取る。

その他、全般的なこと　基本的な表記法が身についていない人がいる。

- 偏微分を表わす ∂ が書けないのか、d で済ませている。(d を ∂ で代用することはできるが、その逆はダメ。)
- 偏微分なのにプライム $'$ を使っている (どの変数で微分しているかが表わせない)。
- 微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}$ は微分したいものの左側に書くべきなのに、右側に書いている。例えば $\dfrac{\partial}{\partial x}g_r$ としないで、$g_r\dfrac{\partial}{\partial x}$ と書いている。

それ以外に、

- 等式なのに等号 $=$ を書かない。
- 括弧 (,) の対応がでたらめ。

というのも結構あった。単なるケアレス・ミスと軽く考えず真剣に反省して欲しい。
　それから、理由を尋ねているときに、「明らか」とか「自明」というのは意味がない。
　同値という言葉を「値が同じ」という意味に使う人がいるが、それは自分勝手な言葉使いである (「同値」という言葉をそういう意味に使うことはない)。

おまけの問題 1　次の行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

答は順に、正値、負値、不定符号、不定符号、正値、負値、どれでもない、どれでもない、である。

おまけの問題 2　次の行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
(5) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

答は順に、正値、不定符号、正値、負値、正値。

おまけの問題 3　次はよくある間違いだが、どこがおかしいか指摘せよ。修正できるものは修正せよ。

1. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が有界であるための必要十分条件は A が上に有界かつ下に有界であることである。
2. 関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ が連続的微分可能とは、f が連続で全微分可能なことである。
3. A が閉集合であるとは、A が開集合でないことである。
4. ある集合 A について閉集合かどうか判別せよと問われたとき、A が開集合であることが分かったので、そう書いておいた。
5. 2 変数関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ の原点での連続性を調べるには、
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$$
であるかどうか調べればよいが、それに直線 $y = kx$ にそった極限がすべて 0 であるか、言い換えると
$$\lim_{x\to 0} |f(x,kx) - f(0,0)| = 0$$
が任意の k について成り立つことを確かめればよい。

チェック問題 1　以下の言葉について、定義を書きなさい。

(1)　有界集合	(2)　開集合	(3)　閉集合	(4)　(点列の) 収束
(5)　連続関数	(6)　偏微分可能	(7)　全微分可能	(8)　連続的微分可能
(9)　C^1 級	(10) (行列の) 正値	(11) (行列の) 負値	(12) (行列の) 不定符号
(13) Hesse 行列	(14) 2 次形式	(14) (関数の) 極大	(15) (関数の) 極小

チェック問題 2　$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合に関係する定理を 3 つ以上あげなさい。

チェック問題 3　次の定理を書け。

(1) 陰関数定理　(2) 逆関数定理　(3) Taylor の定理

　次のよくある間違いを正せ。

1. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が有界であるための必要十分条件は A が上に有界かつ下に有界であることである。

2. 関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ が連続的微分可能とは、f が連続で全微分可能なことである。

3. A が閉集合であるとは、A が開集合でないことである。

4. ある集合 A について閉集合かどうか判別せよと問われたとき、A が開集合であることが分かったので、そう書いておいた。

5. 2 変数関数 $f\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ の原点での連続性を調べるには、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$$

であるかどうか調べればよいが、それに直線 $y = kx$ にそった極限がすべて 0 であるか、言い換えると

$$\lim_{x\to 0} |f(x,kx) - f(0,0)| = 0$$

が任意の k について成り立つことを確かめればよい。

次の各論理式の否定を作れ。

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq N)\ \|x_n - a\| \leq \varepsilon.$

(2) $(\forall x \in A)\ (\exists \varepsilon > 0)$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A.$

(3) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\delta > 0)\ (\forall x \in B(a;\delta))\ \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$

(4) $(\exists R \in \mathbf{R})\ (\forall x \in A)\ \|x\| \leq R.$

4.3 2000 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 追試験問題

1. (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例 (ただし空集合 $\emptyset$, 全空間 $\mathbf{R}^n$ でないもの) の例をあげ、それが開集合であることを示せ。

2 関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq 0) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定義するとき、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。(1) 原点で連続であるかどうか調べよ。(2) 原点で偏微分可能であるか調べよ。(3) 原点で全微分可能であるかどうか調べよ。

3 $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ により $f\colon \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ を定義するとき、$\triangle f \stackrel{\text{def.}}{=} f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ を計算せよ。

4　平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x, y)$ が与えられているとき、$g(r, \theta) = f(x, y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r + \dfrac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$.

5　次の各文はいずれも誤りである。どこが間違っているか指摘し、可能ならば正しく修正せよ。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が有界であるための必要十分条件は A が上に有界かつ下に有界であることである。

(2) 関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ が連続的微分可能とは、f が連続で全微分可能なことである。

(3) A が閉集合であるとは、A が開集合でないことである。

(4) 2 変数関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ の原点での連続性を調べるには、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x, y) - f(0, 0)| = 0$$

であるかどうか調べればよいが、それに直線 $y = kx$ にそった極限がすべて 0 であるか、言い換えると

$$\lim_{x\to 0} |f(x, kx) - f(0, 0)| = 0$$

が任意の k について成り立つことを確かめればよい。

6　$\mathbf{R}^2$ を定義域とする関数 $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ について以下の問に答えよ。(1) f のグラフ $z = f(x, y)$ の点 $(0, 0)$ における接平面の方程式を求めよ。 (2) $\nabla f(x, y) = 0$ となる (x, y) をすべて求めよ。(3) f の極値をすべて求めよ。

5　1999 年度

5.1　1999 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題

次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。A, B 二つあるものについては一方のみを選択して解答せよ。

1A　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。 (2) 次の各集合につき、それが開集合かどうか判別せよ。(i) 空集合 $\emptyset$. (ii) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \geq 1\}$. (iii) $\{1/n; n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$.

1B　**1A** で開集合だけでなく、「閉集合」、「有界集合」について答えよ。

2A　$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}^n$ とするとき、次の各条件の定義と、お互いの関係について述べよ。(a) f は a で連続である。(b) f は a で各変数につき偏微分可能である。(c) f は a で全微分可能である。(d) f は a で連続的微分可能である。

2B　次式で定義される関数 f または g の一方を選び、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases},\quad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2+\sin y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 1 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

(1) 原点で連続であるかどうか調べよ。 (2) 原点での偏微分係数を求めよ。(3) 原点で全微分可能であるかどうか調べよ。

3　xyz 空間で、方程式 $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=1$ で表される曲面に平面 $x+y+z=k$ (k はある実定数) が接しているという。k の値を求めよ。

4　平面の極座標を考える。つまり $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f=f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta)=f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx}+f_{yy}=g_{rr}+\dfrac{1}{r}g_r+\dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$.

5　関数 $f(x,y)=x^4+y^4-2(x^2+y^2)$ について以下の問に答えよ。
(1) f の極値を求めよ。(2) f のすべての極値点を含む範囲で等高線を描け (概形でよい)。

6　(1) 陰関数定理を記せ。
(2) $F(x,y,z)=\begin{pmatrix}F_1(x,y,z)\\ F_2(x,y,z)\end{pmatrix}$, $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, $F_2(x,y,z)=x+y+z$ によって $F\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ を定めるとき、$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\end{pmatrix}$ を計算し、$y\neq z$ なる点の近くでは、$F(x,y,z)=0$ が $y=\varphi_1(x)$, $z=\varphi_2(x)$ と y, z について解けることを示し、φ_1', φ_2' を求めよ。

5.2　1999 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題 解答

1A　(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が開集合であるとは

$$\forall a\in A\quad \exists\varepsilon>0\quad \text{s.t.}\quad B(a;\varepsilon)\subset A$$

が成り立つことと定義する。ただし $B(a;\varepsilon)$ は $\mathbf{R}^n$ の a を中心とする半径 ε の開球である:

$$B(a;\varepsilon)=\{x\in\mathbf{R}^n;\|x-a\|<\varepsilon\}.$$

(2) (i) $\emptyset$ は開集合である。「空集合は $\mathbf{R}^n$ の開集合」という定理があった。
(ii) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;x^2/4+y^2/9\geq 1\}$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合ではない。実際 $a=(2,0)$ は A に属するが、任意の正数 ε に対して $B(a;\varepsilon)$ は A に含まれない ($(2-\varepsilon/2,0)$ は $B(a;\varepsilon)$ に含まれるが、 A には含まれないから)。

(iii) $B=\{1/n;n\in\mathbf{N}\}\cup\{0\}$ は $\mathbf{R}$ の開集合ではない。実際 $a=0$ は B に含まれるが、任意の正数 ε に対して、$B(a;\varepsilon)$ は A は B に含まれない ($-\varepsilon/2$ は $B(a;\varepsilon)$ に含まれるが、負の数であるから明らかに B には含まれないから)。■

1B まず閉集合について。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が閉集合であるとは、補集合 $A^c=\mathbf{R}^n\setminus A$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合であることと定義する。

(2) (a) 空集合は閉集合である。「空集合は $\mathbf{R}^n$ の閉集合」という定理があった。

(b) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;x^2/4+y^2/9\geq 1\}$ は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である。「$f\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ が連続であるとき、$\{x\in\mathbf{R}^n;f(x)\leq c\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である」という定理を $f(x,y)=1-(x^2/4+y^2/9)$, $c=0$ として適用すればよい。

(c) 与えられた集合 $B=\{1/n;n\in\mathbf{N}\}\cup\{0\}$ の補集合は

$$(-\infty,0)\cup(1,\infty)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(1/(n+1),1/n))\right)$$

と開区間の合併の形に表されるから開集合である (「開区間は開集合」、「開集合の合併は開集合」)。ゆえに B は閉集合である。

次に有界集合について。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が有界であるとは、

$$\exists R\in\mathbf{R}\quad\forall x\in A\quad\|x\|\leq R$$

が成り立つことと定義する。

(a) 空集合は有界である (明らかである)。

(b) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;x^2/4+y^2/9\geq 1\}$ は $\mathbf{R}^2$ の有界集合ではない。実際 $x_n=(n,0)$ とおくと、任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して、$x_n\in A$, $\|x_n\|=n$ であるから、

$$\forall R\in\mathbf{R}\quad\exists x\in A\quad\|x\|>R$$

が成り立つ ($n>R$ となる $n\in\mathbf{N}$ を取り、$x=x_n$ とおく)。

(c) 明らかに有界である。

2A

- まず (d)$\Longrightarrow$(c), (c)$\Longrightarrow$ (b), (c)$\Longrightarrow$ (a) が定理として成り立つ (学習済み)。
- 上にあげた定理の系として (d)$\Longrightarrow$ (b), (d)$\Longrightarrow$ (a) も成り立つことは明らか。
- それ以外は成り立たない。

1. (a)$\Longrightarrow$(c) の反例として $f(x)=|x|$.

2. (b)$\Longrightarrow$(c) の反例として

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

で定義される $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ がある。これは $(0,0)$ で偏微分可能 (明らかに $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$) だが、不連続で特に全微分不可能。

3. (c)$\Longrightarrow$(d) の反例として、

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & \end{cases}$$

で定義される $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ がある。これは $x=0$ で微分可能であるが連続的微分可能ではない。

2B f について。

(1) f は原点で連続である。実際 $(x,y)\neq(0,0)$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &= \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \left\{\begin{array}{ll}|x|\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq |x|\dfrac{|y|}{|y|}=|x| & (y\neq 0)\\ |y|\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq |y|\dfrac{|x|}{|x|}=|y| & (x\neq 0)\end{array}\right. \leq |x|+|y|\end{aligned}$$

となるので $(x,y)\to(0,0)$ のとき $|f(x,y)-f(0,0)|\to 0$. すなわち $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$.

(2) $f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}(f(h,0)-f(0,0))/h=\lim_{h\to 0}(0-0)/h=\lim_{h\to 0}0=0$, $f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}(f(0,h)-f(0,0))/h=\lim_{h\to 0}(0-0)/h=\lim_{h\to 0}0=0$.

(3) $(x,y)\to(0,0)$ のとき

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

は 0 に収束しない (そもそも極限がない) ので、f は $(0,0)$ で全微分可能ではない。

g について。

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ とすると

$$\begin{aligned}|g(x,y)-g(0,0)| &= \left|\frac{\sin x^2+\sin y^2}{x^2+y^2}-1\right|\\ &= \left|\frac{\sin x^2-x^2}{x^2+y^2}+\frac{\sin y^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{\sin x^2-x^2}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{\sin y^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\end{aligned}$$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき、右辺第一項、第二項とも 0 に収束する。実際

$$\left|\frac{\sin x^2-x^2}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{\sin x^2-x^2}{x^2}\right|=1-\frac{\sin x^2}{x^2}\to 0\quad(x\to 0),\qquad\left|\frac{\sin y^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\le 1-\frac{\sin y^2}{y^2}\to 0\quad(y\to 0).$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=g(0,0)$ で、g は $(0,0)$ で連続である。

(2) まず Taylor の定理より

$$|\sin x-x|\le\frac{|x|^3}{3!}$$

が成り立つことに注意しておく。任意の $h\neq 0$ に対して

$$\left|\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h}\right|=\left|\frac{1}{h}\left(\frac{\sin h^2}{h^2}-1\right)\right|=\left|\frac{\sin h^2-h^2}{h^3}\right|\le\frac{h^6}{3!}\frac{1}{h^3}=\frac{h^3}{3!}$$

であるから

$$g_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h}=0.$$

まったく同様に $g_y(0,0)=0$.

(3)

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x,y)-g(0,0)-g_x(0,0)x-g_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \frac{|g(x,y)-g(0,0)-0-0|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &\le \left|\frac{\sin x^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|+\left|\frac{\sin y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\sin x^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\le\frac{|\sin x^2-x^2|}{|x|^3}\le\frac{x^6}{3!}\frac{1}{|x|^3}=\frac{|x|^3}{3!}\to 0,\qquad\left|\frac{\sin y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\le\frac{|y|^3}{3!}\to 0.$$

ゆえに $(x,y)\to(0,0)$ のとき

$$\left|\frac{g(x,y)-g(0,0)-g_x(0,0)x-g_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\to 0.$$

すなわち g は $(0,0)$ で微分可能。

3 $F(x,y,z)=x^2/1+y^2/2+z^2/3$ とおくと、曲面は $F(x,y,z)=1$ となり、

$$\nabla F(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\2y/2\\2z/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6x\\3y\\2z\end{pmatrix}.$$

それゆえ曲面 $F(x,y,z)=1$ 上の点 (x_0,y_0,z_0) における法線ベクトルとして $\begin{pmatrix}6x_0\\3y_0\\2z_0\end{pmatrix}$ が取れる。ゆえに接平面の方程式は

$$6x_0(x-x_0)+3y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

移項して

$$6x_0x + 3y_0y + 2z_0z = 6x_0^2 + 3y_0^2 + 2z_0^2 = 6(x_0^2 + y_0^2/2 + z_0^2/3) = 6F(x_0, y_0, z_0).$$

点 (x_0, y_0, z_0) は曲面上の点なので $F(x_0, y_0, z_0) = 1$ であるから、方程式は

$$x_0x + \frac{y_0y}{2} + \frac{z_0z}{3} = 1. \tag{2}$$

この方程式 (2) が $x + y + z = k$ と同値であるためには、ある実数 t が存在して

$$t\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0/2 \\ z_0/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

となることが必要十分。

$$tx_0 = 1, \quad ty_0/2 = 1, \quad tz_0/3 = 1, \quad t = k.$$

これから

$$x_0 = 1/k, \quad y_0 = 2/k, \quad z_0 = 3/k.$$

(x_0, y_0, z_0) が $F(x, y, z) = 1$ 上にあることから、

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{k}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{k}\right)^2 = 1.$$

これを解いて $k = \pm\sqrt{6}$. ■

4 略。

5 (最後の等高線は略 – 紙の節約)。まず grad と Hesse 行列は

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x(x^2-1) \\ 4y(y^2-1) \end{pmatrix}, \quad H(x, y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2-1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) \end{pmatrix}.$$

$\nabla f(x, y) = 0$ を解くと、

$$(x, y) = (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1).$$

- $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ (複号任意) のとき、$H(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ であり、これは明らかに正値であるから、極小となる。極小値 $f(\pm 1, \pm 1) = -2$.

- $(x, y) = (\pm 1, 0)$ のとき、$H(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ であり、これは明らかに不定符号であるから、極値ではない。

- $(x,y)=(0,\pm1)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$ であり、これは明らかに不定符号であるから、極値ではない。
- $(x,y)=(0,0)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ であり、これは明らかに負値であるから、極大となる。極大値 $f(0,0)=0$.

6

(1) (略)

(2) $X=x$, $Y=(y,z)$ として $F(x,y,z)=F(X,Y)$ と表すと

$$\det\frac{\partial F}{\partial Y}=\det\begin{pmatrix}(F_1)_y & (F_1)_z\\ (F_2)_y & (F_2)_z\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2(y-z).$$

これは $y\neq z$ のとき $\neq 0$ であるから、陰関数定理が適用できて $F(X,Y)=0$ は Y について $Y=\varphi(X)$ と解ける。つまり $y=\varphi_1(x)$, $z=\varphi_2(x)$ と解けるわけである。

$$\varphi'(X)=\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)=\frac{1}{2(y-z)}\begin{pmatrix}1 & -2z\\ -1 & 2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x-z}{y-z}\\ \dfrac{-x+y}{y-z}\end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\varphi_1'(x)=\frac{x-z}{y-z}=\frac{x-\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)},\quad \varphi_2'(x)=\frac{-x+y}{y-z}=\frac{-x+\varphi_1(x)}{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}.$$

5.3 1999年度解析概論I 追試験問題 (1999年7月27日版)

以下の 6 問に解答せよ。6A, 6B についてはいずれか一問を選択して解答せよ。

1 (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例 (ただし、空集合や全空間でないもの) を一つあげ、それが開集合であることを、前小問の解答に記した定義にもとづき証明せよ。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合のうち、開集合でないものを一つあげ、それが開集合でないことを示せ。

2 (1) Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}^m$, $a\in\Omega$ とするとき、f が a で全微分可能であるとはどういうことか、定義を記せ。(2) A を実数を成分とする m 行 n 列の行列として、$g\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ を $g(x)=Bx$ $(x\in\mathbf{R}^n)$ で定義する。このとき任意の $x\in\mathbf{R}^n$ に対して g は x で全微分可能であることを示せ。

3 $\mathbf{R}^2$ を定義域とする関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ について以下の問に答えよ。(1) f のグラフ $z=f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における接平面の方程式を求めよ。 (2) $\nabla f(x,y)=0$ となる (x,y) をすべて求めよ。(3) f の極値をすべて求めよ。

4 (1) C^2 級の関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して、$v(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$ とおくと、$\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ であることを示せ。
(2) $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ が C^2 級の関数で、$\mathbf{R}^2$ 上 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすとするとき、以下の問に答えよ。(a) $X = x - t$, $Y = x + t$, $u(x,t) = U(X,Y)$ により $U\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を定義すると、$\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = 0$ が成り立つことを示せ。(b) $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$ を満たす関数 f, g が存在することを示せ。

5 Taylor の定理により、以下の関数を $(0,0)$ において 4 階の項 (x, y の 4 次式のところ) まで展開せよ (剰余項は書かなくてもよい)。

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.$$

6A (1) 陰関数定理を記せ。 (2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $P = (1,1)$ とする。$f(x,y) = 0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y = g(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

6B (1) 陰関数定理を記せ。(2) 変数 x, y, z, u, v の間に $xy + uv = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2$ の関係があるとする。点 $(x,y,z,u,v) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, 1, 2)$ の近傍において、これを u, v について解けることを示せ。さらに $(x,y,z) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ における $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$ の値を求めよ。

5.4 1999 年度解析概論 I 追試験問題

(1999 年 7 月 28 日 (水曜日) 実施)

1 (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を書け。(2) 次の各命題の真偽を判定し、真であるものは証明し、偽であるものは反例をあげよ。

(a) U_i $(i = 1, 2, \cdots)$ がいずれも $\mathbf{R}^n$ の開集合ならば、和集合 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ も $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(b) U_i $(i = 1, 2, \cdots)$ がいずれも $\mathbf{R}^n$ の開集合ならば、共通部分 $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ も $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(c) $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が連続写像で、U が $\mathbf{R}^n$ の開集合であるとき $f(U)$ は $\mathbf{R}^m$ の開集合である。

2 次式で定義される関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ について以下の問に答えよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} & (x + y \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x + y = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) f は $(0,0)$ で連続かどうか調べよ。(2) f は $(0,0)$ で偏微分可能かどうか調べよ。(3) f は $(0,0)$ で全微分可能かどうか調べよ。

3　$f(x,y) = 4xy - 2y^2 - x^4$ で定義される $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ について、以下の問に答えよ。(1) $\nabla f(x,y) = 0$ となる点 (x,y) をすべて求めよ。(2) f の極値を求めよ。(3) f のグラフ $z = f(x,y)$ の $(x,y) = (0,0)$ における接平面の方程式を求めよ。

4A　次式で定義される関数 $U\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が $U_t = U_{xx}$ を満たすことを示せ。

$$U(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

4B　つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi))$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) (a) 写像 $(r,\theta) \mapsto (x,y)$ の偏微分係数 x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) 写像 $(x,y) \mapsto (r,\theta)$ の偏微分係数 r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta) = f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} を g の偏微分係数 (g_r, g_θ, g_{rr}, $g_{r\theta}$, $g_{\theta\theta}$ 等) を用いて表せ。

5　(1) $n \in \mathbf{N}$ に対して $f(t) = \log(1+t)$ の n 階導関数を求め、$f(t)$ を $t = 0$ において Taylor 展開せよ。(2) $g(x) = \log(1+x^2)$ を $x = 0$ において展開せよ。(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - x\sin x}{x^4}$ を求めよ。

6　(1) 逆関数定理を書け。
(2) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $f_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $f_2(x,y) = 3x^2y - y^3$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で f の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の十分近くにおける f の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

6　1998年度

6.1　1998年度解析概論 I, 解析概論演習 I　試験問題

(1998年7月27日実施)
次の 1 〜 6 の 6 問を解答せよ。A, B 二つあるものは、一方を選択して解答すること。

1A.　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を書け。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を書け。(3) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の例 (空集合と全空間以外のもの) を一つあげ、それが閉集合であることを定義に従って示せ。

1B.　(1) $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合の例を一つ記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合に関係した定理をなるべくたくさん書け。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A 上の連続関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ が、任意の $x \in A$ に対して $f(x) > 0$ を満たしているとするとき、$f(x) \geq C > 0$ $(\forall x \in A)$ を満たすような定数 C が存在するかどうか答え、成り立つならばその理由を、成り立たないならば反例をあげよ。

2　次式で定義される関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ について、(1) 原点での連続性, (2) 原点での偏微分可能性, (3) 原点での全微分可能性, の三つを調べよ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0)).\end{cases}$$

3　方程式 $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ で定義される $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 S について、以下の問に答えよ。(1) S 上の点 (x_0,y_0,z_0) における S の接平面の方程式を求めよ。(2) S 上の点 (x_0,y_0,z_0) における S の法線ベクトルが、ベクトル $(1,1,1)$ に平行であるという。(x_0,y_0,z_0) を求めよ。(3) 点 (x,y,z) が曲面 S 上を動くときの、$x+y+z$ の値の範囲を求めよ。

4A　平面の極座標を考える。つまり $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f=f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta)=f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

4B　C^2 級の関数 $f\colon [0,\infty)\to\mathbf{R}$ が与えられたとき、$u\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ を $u(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ で定める。このとき、以下の問に答えよ。
(1) ∇u を f を用いて表せ。(2) $\triangle u := u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ を f を用いて表せ。(3) u が $\triangle u(x,y,z)=0$ $((x,y,z)\neq(0,0,0))$ を満たしているならば、実は u は次の形をしていることを示せ。

$$u(x,y,z)=\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+D \quad (C,\ D \text{ は定数}).$$

5　関数 $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ の極値を求めよ。

6　(1) 陰関数定理を記せ。
(2) $F(x,y):=x(x-1)^2-y^2$ とするとき、以下の問に答えよ。(a) 方程式 $F(x,y)=0$ で定義される xy 平面内の曲線の概形を描け。(b) $F(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ について、(1) で記した陰関数定理が適用できない点 (その点の近傍での陰関数の存在が定理から主張できない点) を求めよ。

6.2　1998 年度解析概論 I, 解析概論演習 I　追試験問題

(1998 年度 7 月 31 日実施？) 次の 1 ～ 7 の 7 問を解答せよ。

1.　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を書け。(2) $\mathbf{R}^2$ の開集合の例 (空集合と全空間以外のもの) を一つあげよ。(3) (2) であげた集合が開集合であることを (1) で記した定義に従って証明せよ。

注意　(3) では、具体的にどう ε を取ればいいのか書かないと証明にならない。

2. 関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を次式で定めるとき、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y)=(0,0) \text{ のとき}). \end{cases}$$

(1) f は原点で連続か？理由をつけて答えよ。(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ。(3) f は原点で全微分可能でないことを示せ。

3. 多変数ベクトル値関数について以下の問に答えよ。(1) 連続性の定義を書け。(2) 全微分可能性の定義を書け。 (3) 連続的微分可能性 (C^1 級である) の定義を書け。 (4) 多変数ベクトル値関数について、以下の (a)〜 (d) の 4 条件の間の関係を述べよ (任意の二条件について、一方から他方が導かれるかどうか述べよ)。(a) 連続である。 (b) 全微分可能である。 (c) 連続的微分可能である。 (d) 各変数について偏微分可能である。

4. xyz 空間で、方程式 $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=1$ で表される曲面に、平面 $x+y+z=k$ (k はある実定数) が接しているという。このとき k の値を求めよ。

5. (1) U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon U\to V$ を C^1 級の全単射で逆写像も C^1 級であるものとする。$x\in U$ に対して $f(x)=y$ とおくとき、合成関数の微分法を用いて、$(f^{-1})'(y)=(f'(x))^{-1}$ を示せ。
(2) $U=\{(r,\theta); r>0, -\pi<\theta<\pi\}$ とおく。$\varphi\colon U\ni(r,\theta)\longmapsto(x,y)\in\mathbf{R}^2$ を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と定めるとき、以下のものを求めよ。
(a) φ のヤコビ行列 $\varphi'(r,\theta)$. (b) φ^{-1} のヤコビ行列 $(\varphi^{-1})'(x,y)$. (c) $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$.

6. 関数 $f(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$ について、以下の問に答えよ。(1) ∇f を求めよ。 (2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) $\nabla f(x,y)=0$ となる点 (x,y) を求めよ。 (4) f の極値を求めよ。

7. (1) 陰関数定理を記せ。
(2) $F(x,y):=x^3+y^3-2xy$, $P=(1,1)$ とする。$F(x,y)=0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在を示し、その点における微分係数の値を求めよ。

6.3 1998 年度解析概論 I, 解析概論演習 I　追試験問題 解答

1. (1) $A\subset\mathbf{R}^n$ が開集合であるとは、$\forall x\in A\ \exists\varepsilon>0$ s.t. $B(x;\varepsilon)\subset A$. (2) $A=(0,1)\times(0,1)$.
(3) $\vec{x}=(x,y)\in A$ とすると、$0<x<1$, $0<y<1$. ここで $\varepsilon=\min\{x,1-x,y,1-y\}$ とおくと $\varepsilon>0$ で $B(\vec{x};\varepsilon)\subset A$.

2. (1) 連続である。

$$|f(x,y)|=\frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2}\le\frac{|x|^3}{x^2+y^2}+\frac{|y|^3}{x^2+y^2}\le\frac{x^2}{x^2+y^2}|x|+\frac{y^2}{x^2+y^2}|y|\le|x|+|y|\to0\quad((x,y)\to(0,0))$$

これから

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

(2)

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3/h^2-0}{h} = 1, \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^3/h^2-0}{h} = -1. \end{aligned}$$

(3) もし微分可能なら

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

となるはずで、これから

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3-k^3}{h^2+k^2}-h+k}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{h,k\to 0}\frac{(h^3-k^3)-(h-k)(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{h,k\to 0}\frac{hk^2-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

が導かれるはずだが、これは成り立たないことが分かる。実際

4.

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}-1$$

より

$$\nabla f = (2x, y, 2z/3).$$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 2z/3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \lambda, \quad z = \frac{3\lambda}{2}.$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2 = 1.$$

$$\lambda^2 = \frac{2}{3}.$$

$$(x,y,z) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right).$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}\right) = \pm\sqrt{6}.$$

6.

$$f(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$$

$$f_x=y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2},\quad f_y=x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

(1) $\nabla f=\begin{pmatrix} y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} \\ x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$

(2)

$$H(x,y)=e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} -2xy(3-2x^2) & (1-2x^2)(1-2y^2) \\ (1-2x^2)(1-2y^2) & -2xy(3-2y^2) \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\nabla f=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y(1-2x^2)=0 \\ \text{and} \\ x(1-2y^2)=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=0 \quad \text{or} \quad x=\pm\sqrt{1/2} \\ \text{and} \\ x=0 \quad \text{or} \quad y=\pm\sqrt{1/2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y)=(0,0),\left(\pm\sqrt{1/2},\pm\sqrt{1/2}\right) \quad (\text{複号任意})$$

7 1997年度

7.1 1997 年度 解析概論 I・解析概論演習 I 試験問題

(1997 年 7 月 23 日実施)

1 〜 7 を解け (結果だけでなく途中経過も記せ)。1, 3, 6 は A, B いずれかを選んで解け。

1A (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。(2) 次の命題を証明せよ。「U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき、$U\bigcap V$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。」(3) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例として、空集合、全空間以外のものをあげ、それが開集合であることを証明せよ。

1B $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ を連続関数とするとき、$\Omega:=\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)>0\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合、 $F:=\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)\le 0\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。このことを示せ。

2 関数 $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を次式で定めるとき、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y)=(0,0) \text{ のとき}). \end{cases}$$

(1) f は原点で連続か？理由をつけて答えよ。(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ。(3) f は原点で微分可能でないことを示せ。

3A $u(t,x,y,z)=\dfrac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)$ は $u_t=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ を満たすことを示せ。

3B　A を n 次実対称行列、$b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とするとき、$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c \quad (x \in \mathbf{R}^n)$ で定義するとき、 $\operatorname{grad} f$ と f の Hesse 行列を求めよ (途中経過を記せ)。

4　次の二つの曲面 π_1, π_2 が接する (π_1, π_2 の接平面が一致する) ように正定数 λ を定めよ。

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad xyz = \lambda, \\ \pi_2 &: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

5　平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x, y)$ が与えられているとき、$g(r, \theta) = f(x, y)$ で関数 g を定める。このとき (a) f_x, f_y を g_r, g_θ で表せ。(b) g_r, g_θ を f_x, f_y で表せ。

(3) 次の式が成り立つことを確かめよ: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

6A　$f(x, y) = x^4 - xy + y^4$ の極大・極小を調べよ。

6B　$K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ とおき、$f\colon K \to \mathbf{R}$ を $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$ で定義する。このとき、f の最大値と最小値を求めよ。

7　(1) 陰関数定理を記せ。(2) 方程式 $F(x, y, z) = x^2 + (x - y^2 + 1)z - z^3 = 0$ は点 $(0, 0, 1)$ の近傍で z について解けることを示せ。また、その点における $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ の値を求めよ。

7.2　1997 年度　解析概論 I・解析概論演習 I　追試験問題

(1997 年 7 月 29 日 13:00〜15:00 実施)
1 〜 7 を解け (結果だけでなく途中経過も記せ)。

1　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。(2) 次の命題を (1) で述べた定義に基づいて証明せよ。「U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき、$U \bigcup V$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。」(**注意:** 本試験の問題 1A では $U \bigcap V$ であったが、ここでは $U \bigcup V$ である。間違えないこと。) (3) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例として、空集合、全空間以外のものをあげ、それが開集合であることを証明せよ。

2　関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。このとき、以下の問に答えよ。
(1) $f(x, y)$ は、各 y を固定すると x の連続関数であり ($\mathbf{R} \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbf{R}$ は連続という

こと)、各 x を固定すると y の連続関数である ($\mathbf{R} \ni y \mapsto f(x,y) \in \mathbf{R}$ は連続ということ) ことを示せ。(簡単な説明で構わない。どちらでも同様だから、一方だけ示せばよい。)
(2) f は原点で連続でないことを示せ。

3 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \|x\|^{2-n}$ で定めるとき、次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

4 r を正定数とするとき、$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ とおく。(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 (a,b,c) における接平面を求めよ。

5 平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x,y)$ が与えられたとき、$g(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で関数 g を定める。このとき
(a) g_r, g_θ を f_x, f_y で表せ。(b) f_x, f_y を g_r, g_θ で表せ。
(c) 次の式が成り立つことを確かめよ: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$

6 $f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ の極大・極小を調べよ。

7 (1) 陰関数定理を記せ。
(2) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix}$, $F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $F_2(x,y,z) = x + y + z$ によって $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を定めるとき、$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$ を計算し、$y \neq z$ なる点の近くでは、$F(x,y,z) = 0$ が $y = \varphi(x)$, $z = \phi(x)$ と y, z について解けることを示し、φ', ψ' を求めよ。

8 1996年度

8.1 1996 年度　解析概論 I・解析概論演習 I　試験問題

(1996 年 7 月 25 日実施)
次の 1, 2, 3, 4, 5, 6 を解け。1, 2, 3 は選択問題 (それぞれ **A**, **B** のいずれか一方を選べ)。結果だけでなく途中経過も記すこと。

1A 次の $\mathbf{R}^2$ の部分集合を図示し、有界であるか、開集合であるか、閉集合であるかを判定せよ (理由は述べなくてよい)。 (1) $A = \{(x,y); x^2 + \dfrac{y^2}{4} < 1\}$. (2) $B = \{(x,y); x^2 - y^2 = 1\}$.

1B　次の各問に答えよ。(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べなさい。(2) $a \in \mathbf{R}^n$ とするとき、$A = \{a\}$ は開集合ではないことを、(1) で述べた開集合の定義に基づいて証明しなさい。(3) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例を一つあげ、それが開集合であることを、(1) で述べた開集合の定義に基づいて証明しなさい。

2A　(1) 空間極座標の定義を述べよ。(2) 空間極座標で定義される写像のヤコビ行列を求めよ。

2B　$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ であることを示せ。
(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ を示せ。

3A　曲面 $z = xy(x^2+y^2-4)$ 上の点 $(1,2,2)$ における曲面の接平面と法線を求めよ。

3B　$u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ が C^2 級の関数で、$\mathbf{R}^2$ 上 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすとする。
(1) $X = x - t,\ Y = x + t,\ u(x,t) = U(X,Y)$ により $U\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を定義するとき、$\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = 0$ が成り立つことを示せ。
(2) $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$ を満たす関数 $f,\ g$ が存在することを示せ。

4　関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2$ の極値を求めよ。

5　(1) 陰関数定理を記せ。(2) $F(x,y,z) = x^2 + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} - 3,\ P = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ とする。$F(x,y,z) = 0$ の点 P の近くにおける陰関数 $z = \varphi(x,y)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

6　$a_1, a_2, \cdots, a_n, b \in \mathbf{R},\ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ とするとき、条件 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ のもとで、$f(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$ の最小値を求めよ。

8.2　1996 年度　解析概論 I・解析概論演習 I　試験問題 略解

1A

(1) A は楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ の内部 (斜線含まず) である。図は省略する。

(a) A は有界である。

(b) A は開集合である。

(c) A は閉集合ではない。

(2) B は 2 直線 $x+y=0$, $x-y=0$ を漸近線とする双曲線である。図は省略する。

(a) B は有界でない。

(b) B は開集合でない。

(c) B は閉集合である。

1B

(1) A を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とするとき、 A が $\mathbf{R}^n$ の開集合であるとは、

$$\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B(a;\varepsilon) \subset A$$

が成り立つことである。

(2) $A = \{a\}$ とする。 $a \in A$ であるが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(a;\varepsilon) \not\subset A$ である。(実際、$x = a + \dfrac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと、$\|x-a\| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ より、 $x \in B(a;\varepsilon)$. また $a \neq x$ より $x \notin A$. ゆえに $B(a;\varepsilon) \not\subset A$.) ゆえに A は開集合でない。

(3) $A = \mathbf{R}^n$ とすると、A は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。実際、$\forall a \in A$ に対して、$\varepsilon = 1$ とすると $B(a;1) \subset \mathbf{R}^n = A$ であるから。

2A

(1) $\mathbf{R}^3$ の点 $P = (x,y,z)$ に対して

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{pmatrix}$$

を満たす (r,θ,φ) を P の極座標と言う。

(2) $\Phi\colon (r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z)$ とすると、

$$\Phi'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

2B

(1) $x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(x,0)} \\
&= \left(x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{(x^2+y^2)(-2y)-(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(x,0)} \\
&= x\frac{x^2}{x^2} \\
&= x.
\end{aligned}$$

$x=0$ のときは

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0=x.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ についても、同様の計算で $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-y$ が示される (省略)。

(2) (1) の結果から、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}(x)\Bigg|_{x=0}=1, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right)\Bigg|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x}(-y)\Bigg|_{y=0}=-1
\end{aligned}$$

であるから、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$

3A $F(x,y,z)=xy(x^2+y^2-4)-z$ とおくと、

$$z=xy(x^2+y^2-4)\Leftrightarrow F(x,y,z)=0.$$

$$\nabla F(x,y,z)=\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(x^2+y^2-4)+xy\cdot 2x\\x(x^2+y^2-4)+xy\cdot 2y\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x^2y+y^3-4y\\3xy^2+x^3-4x\\-1\end{pmatrix},$$

$$\nabla F(1,2,2)=\begin{pmatrix}3\cdot 2+2^3-4\cdot 2\\3\cdot 2^2+1-4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\\-1\end{pmatrix}$$

であるから、接平面の方程式は

$$6(x-1)+9(y-2)+(-1)(z-2)=0,$$

すなわち

$$6x+9y-z-22=0.$$

また法線の方程式は

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{9}=\frac{z-2}{-1}.$$

3B

(1) まず

$$X = x - t, \quad Y = x + t$$

より

$$x = \frac{1}{2}(X+Y), \quad t = \frac{1}{2}(Y-X)$$

である。合成関数の微分法より

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial Y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)\frac{\partial t}{\partial Y} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\cdot\frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right) = 0$ より、$\dfrac{\partial U}{\partial Y}$ は X によらない関数である。それを G と書こう:

$$\frac{\partial U}{\partial Y}(X,Y) = G(Y).$$

これから

$$U(X,Y) = U(X,0) + \int_0^Y \frac{\partial U}{\partial Y}(X,s)ds = U(X,0) + \int_0^Y G(s)ds.$$

そこで $f(X) := U(X,0),\ g(Y) := \displaystyle\int_0^Y G(s)ds$ とおくと、

$$U(X,Y) = f(X) + g(Y).$$

ゆえに

$$u(x,t) = U(X,Y) = f(X) + g(Y) = f(x-t) + g(x+t).$$

4 $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2$ より

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2x + y \\ 3y^2 + x - 2y \end{pmatrix}.$$

また f の Hesse 行列を H とすると

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-2 & 1 \\ 1 & 6y-2 \end{pmatrix}.$$

さて、

$$\nabla f(x,y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3x^2-2x+y=0 \\ 3y^2+x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x+y=0 \\ (x+y-1)(x+y)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\quad (x,y)=(0,0),(1/3,1/3).$$

(1) $(x,y)=(0,0)$ のとき $H=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. H の r 次主座小行列を D_r とすると、$\det D_1 = -1<0$, $\det D_2=4-1=3>0$ であるから、 H は負値である。ゆえにここで極大となる。

(2) $(x,y)=(1/3,1/3)$ のとき $H=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. H の r 次主座小行列を D_r とすると、$\det D_2 = -1<0$ であるから、 H は不定符号である。ゆえにここで極値をとらない。

ゆえに f は $(0,0)$ で極大値 0 をとる。

5

(1) 省略。

(2) $F(x,y,z)=x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}-3$ より、F は C^1 級で $F'(x,y,z)=(2x,y,2z/3)$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,\sqrt{2},\sqrt{3})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\neq 0$ であるから、$(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ の近くで $F(x,y,z)=0$ は $z=\varphi(x,y)$ と解けて、

$$\varphi'(x,y)=-\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right),\quad \therefore\ \varphi'(1,2)=-\frac{3}{2\sqrt{3}}(2\cdot 1,\sqrt{2})=\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

6 $g(x_1,\cdots,x_n):=a_1x_1+\cdots a_nx_n+b$ とおくと、 f, g は $\mathbf{R}^n$ で C^1 級である。条件 $g(x)=0$ のもとで $f(x)$ が最小値を持つことの証明はここでは省略する (幾何学的に考えれば、原点と超平面 $g(x)=0$ との距離の平方であるから明らかである。きちんと出来たらエライ。)。$\nabla g(x)=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、その条件つき最小値は Lagrange の未定乗数法で求まる。すなわち

$$F(x,\lambda):=f(x)-\lambda g(x)$$

とおくと、条件つき最小値を与える点は連立方程式

$$\nabla F(x,\lambda)=0 \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_j} \quad (j=1,\cdots,n) \\ g(x)=0 \end{cases}$$

の解である (∇ は (x,λ) に関する gradient を表すとする)。これを解くと

$$x_j=-\frac{a_jb}{\displaystyle\sum_{k=1}^n (a_k)^2} \quad (j=1,\cdots,n).$$

ゆえに求める最小値は

$$\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{a_j b}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}\right)^2=\frac{\sum_{j=1}^{n}b^2(a_j)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2\right)^2}=\frac{b^2}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}.$$

9　1995年度

9.1　1995 年度　微分積分学 I・同演習　試験問題

次の 1, 2, 3, 4, 5 を解け。1,2,3,5 は選択問題である。

1A　次の $\mathbf{R}$ の各部分集合について、有界であるか、開集合であるか、閉集合であるかを判別し理由を述べよ。
(1) $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\}$. (2) $(0,1)$. (3) $\{x; x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 2\}$. (4) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. (5) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$.

1B$_1$　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。 (2) $\mathbf{R}^n$ の開球が開集合であることを、(1) の解答で述べた定義に従って示せ。 (3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で、開集合でないものの例をあげ、開集合でない理由を述べよ。

1B$_2$　(1) $\mathbf{R}^n$ の収束列は有界であることを証明せよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の収束列は Cauchy 列であることを証明せよ。

1C　U, V をそれぞれ $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon U \to V$ を連続関数とする。このとき $W \subset V$ なる任意の開集合 W に対して $f^{-1}(W) := \{x \in U; f(x) \in W\}$ は $\mathbf{R}^m$ の開集合となることを証明するため、以下の空欄を埋めよ。「任意の $a \in$ $\boxed{\text{ア}}$ をとると、$a \in U$ かつ $f(a) \in$ $\boxed{\text{イ}}$. $\boxed{\text{イ}}$ は $\boxed{\text{ウ}}$ であるから、$\exists\varepsilon > 0$ s.t. $B(f(a);\varepsilon) \subset$ $\boxed{\text{イ}}$ (ここで $B(\alpha; r)$ は中心 α, 半径 r の開球を表す記号). f の連続性から $\boxed{\text{エ}}$ $\delta > 0$ s.t. $\|x-a\| < \delta \Longrightarrow x \in U$ かつ $\|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$. ゆえに $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset W$ となるが、これから $B(a;\delta) \subset$ $\boxed{\text{オ}}$. ゆえに $f^{-1}(W)$ は開集合である。」

2A　次の式で定義される関数 $u\colon \mathbf{R}^4 \ni (t,x,y,z) \mapsto u(t,x,y,z) \in \mathbf{R}$ が $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ を満たすことを示せ。

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right).$$

2B$_1$　U, V をそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の開集合、$f\colon U \to V$ とする。
(1) f が連続であるとはどういうことか。定義を記せ。 (2) f が微分可能であるとはどういうことか。定義を記せ。 (3) f が C^1 級であるとはどういうことか。定義を記せ。 (4) 多変数関

数について、(a) 連続である, (b) 各変数に関して偏微分可能である, (c) 微分可能である, (d) C^1 級である、という 4 つの条件の間の関係を述べよ。

2B$_2$ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x$ を満たす C^2 級の関数 f は存在しないことを示せ。

3A 次の各 f の偏導関数 $f_x,\ f_y$ を求めよ。(1) $f(x,y) = \cos(x^3 + xy)$. (2) $f(x,y) = \arccos \dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$.
(3) $f(x,y) = \log\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$. (4) $f(x,y) = \log\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3B$_1$ A を n 次実対称行列、$b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ として、$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c$ で定める。この時 $\nabla f(x)$ を求めよ。

3B$_2$ xyz 空間で、方程式 $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} = 1$ で表される曲面に平面 $x+y+z=k$ (k はある実定数) が接しているという。k の値を求めよ。

3C $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を C^1 級の写像で、$a \in \mathbf{R}^n$, $\det f'(a) = 0$ が成り立つとする。a において逆関数定理の仮定は成り立たないので、

$$\exists U\colon a \text{ を含む } \mathbf{R}^m \text{ の開集合 } \ \exists V\colon f(a) \text{ を含む } \mathbf{R}^n \text{ の開集合 } \ \text{s.t. } f|_U\colon U \to V \text{ は全単射 (ゆえに } f_U^{-1} \text{ が存在)}$$

は成り立つとは限らないが、f によっては成り立つこともありうる。その例をあげよ。また、たとえ逆写像 f_U^{-1} が存在してもそれは $f(a)$ で微分可能ではありえないことを示せ。

4A $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ で定義される関数 f の極値点を求め、極大、極小を判定せよ。

5A (1) 陰関数定理を記せ。(2) $f(x,y) = x^3+y^3-2xy$, $P=(1,1)$ とする。$f(x,y)=0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y=g(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

5B 連立方程式 $x+y+z+w=0$, $e^x+e^{2y}+e^z+e^w=4$ は、0 の近傍で x, y について解けることを証明せよ。

9.2 1995 年度微分積分学 I・同演習 試験問題解答

1A 演習で大部分やってあるので、復習してあれば大体出来るであろう。

- $\mathbf{R}$ において開球 $B(a;r) := \{x \in \mathbf{R}; |x-a| < r\}$ は要するに開区間 $(a-r, a+r)$ のこと。
- 有界集合の定義
- 開集合の定義

- 「任意の開区間は開集合」
- 「任意個数の開集合の合併は開集合」
- 「集合 A が閉集合であるための必要十分条件は $\mathbf{R}\setminus A$ が開集合であること」

これくらいが基礎知識であろうか。それから講義で直接取り上げなかったが「1 点からなる集合 $\{a\}$ は開集合ではないが閉集合である」ということと、その証明をマスターしておくとスイスイ解ける。

(1) $A=\{\frac{1}{n}; n\in\mathbf{N}\}$ とおくと、

  (a) $\forall x\in A$ に対して $|x|\le 1$ が成り立つので A は有界である。

  (b) $1\in A$ であるが、$\forall\varepsilon>0$ に対して $B(1;\varepsilon)=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ は 1 より大きい数 (例えば $1+\varepsilon/2$) を含むので $B(1;\varepsilon)\not\subset A$. ゆえに A は開集合ではない。

  (c) 講義で説明したように $\overline{A}=A\cup\{0\}\neq A$. 従って A は閉集合ではない。

(2) $A=(0,1)$ とおくと

  (a) $\forall x\in A$ に対して $|x|\le 1$ が成り立つので A は有界である。

  (b) A は開区間で、講義で説明したように「開区間は開集合」であるから、 A は開集合。(念のために繰り返し: $\forall x\in A$ に対して $\varepsilon:=dist(x,A)$ とおけば $B(x;\varepsilon)\subset A$ であるから)

  (c) $\mathbf{R}\setminus A=(-\infty,0]\cup[1,\infty)$ は開集合ではない。実際 $1\in\mathbf{R}\setminus A$ であるが $\forall\varepsilon>0$ に対して $B(1;\varepsilon)$ は $0<y<1$ なる y (例えば $y=1-\varepsilon/2$) を含むから $B(1;\varepsilon)\not\subset(\mathbf{R}\setminus A)$。ゆえに $\mathbf{R}\setminus A$ は開集合ではない。

(3) $A=\{x; x\in\mathbf{R}, x^2\ge 2\}$ とおく。 $A=\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},\infty\right)$ である。

  (a) どんな数よりも大きな数が A に含まれていることは明らかだから A は有界ではない。

  (b) $\sqrt{2}\in A$ であるが、$\forall\varepsilon>0$ に対して $B(\sqrt{2};\varepsilon)$ は $0<y<\sqrt{2}$ なる y (例えば $y=\sqrt{2}-\varepsilon/2$) を含み、 $y\in A$ であるから $B(\sqrt{2};\varepsilon)\not\subset A$. ゆえに A は開集合ではない。

  (c) $\mathbf{R}\setminus A=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ は開区間ゆえ開集合。ゆえに A は閉集合である。

(4) $A=\mathbf{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

  (a) 前問と同様に A は有界でない。

  (b) A は二つの開区間（それは開集合）の合併であるから開集合。

  (c) $\mathbf{R}\setminus A=\{0\}$ は開集合ではない ($\forall\varepsilon>0$ に対して $B(0;\varepsilon)\not\subset A$ は明らかだから。) ゆえに A は閉集合ではない。

(5) $A=\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ とおくと、講義で示したように $A=\{0\}$.

  (a) 明らかに有界。($\forall x\in A$ に対して $|x|=0\le 0.$)

(b) $0 \in A$ であるが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(0;\varepsilon) \not\subset A$ は明らかだから A は開集合ではない。

(c) $\mathbf{R} \setminus A$ は前問の集合でこれは開集合だったから、A は閉集合である。

1B$_1$ 以下 $B(a;r)$ で $\mathbf{R}^n$ における中心 a, 半径 r の開球 $\{x \in \mathbf{R}^n; \|x-a\| < r\}$ を表すとする。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A について

$$A\text{ が開集合} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0\ B(x;\varepsilon) \subset A.$$

(2) $A = B(a;r)$ として A が開集合であることを証明する。$\forall x \in A$ に対して、定義から $\|x-a\| < r$ であるから、$\varepsilon := r - \|x-a\|$ とおけば $\varepsilon > 0$. すると $B(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つ。実際 $\forall y \in B(x;\varepsilon)$ に対して $\|y-a\| = \|(y-x)+(x-a)\| \le \|y-x\|+\|x-a\| < \varepsilon+\|x-a\| = r$, すなわち $y \in B(a;r) = A$. ゆえに A は開集合である。

(3) 1 点からなる集合、例えば $A = \{0\}$ は開集合ではない。実際 $\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(0;\varepsilon)$ は 0 以外の要素 (たとえば $\frac{\varepsilon}{2}e_1$, ここで $e_1 = {}^t(1,0,\cdots,0)$ は第 1 成分が 1 で残りの成分は 0 のベクトル) を必ず含むので $B(0;\varepsilon) \not\subset A$ となるから。

1B$_2$

(1) $\{x_m; m \in \mathbf{N}\}$ を $\mathbf{R}^n$ の収束列とする。$\{x_m\}$ の極限を a とおけば収束の定義から $\exists N > 0$ s.t. $m \ge N$ なる任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して $\|x_m - a\| < 1$. このとき $\|x_m\| \le \|x_m - a\| + \|a\| \le \|a\| + 1$. そこで $\mathbf{R} := \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_m\|, \|a\|+1\}$ とおくと、$\forall m \in \mathbf{N}$ に対して $\|x_m\| \le R$ が成り立つ。ゆえに $\{x_m\}$ は有界である。

(2) $\{x_m; m \in \mathbf{N}\}$ を $\mathbf{R}^n$ の収束列とする。$\{x_m\}$ の極限を a とおけば収束の定義から $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ s.t. $m \ge N$ なる任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して $\|x_m - a\| < \varepsilon/2$. すると $m \ge N, \ell \ge N$ なる任意の $m \in \mathbf{N}, \ell \in \mathbf{N}$ に対して $\|x_m - a\| \le \varepsilon/2$, $\|x_\ell - a\| \le \varepsilon/2$ であるから

$$\|x_m - x_\ell\| = \|x_m - a + (a - x_\ell)\| \le \|x_m - a\| + \|a - x_\ell\| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

ゆえに $\{x_m\}$ は Cauchy 列である。

1C 「連続関数による開集合の逆像は開集合である」という一般的になりたつ命題の証明である。何も見ずに証明せよと言われたら簡単ではないかもしれないが、この種の証明を見慣れていればいくつかの部分は（極論すれば考えないでも）分かってしまうであろう。(ア) $f^{-1}(W)$ (イ) W (ウ) 開集合 (エ) $\exists$ (オ) $f^{-1}(W)$.

2A 演習問題に一般の n 次元版を出題しておいた (誰も解かなかったが)。u は数理物理や解析学ではよく知られた熱方程式の基本解と呼ばれるもので、熱方程式 $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ を満たすことはその筋では常識である。

$$u(t,x,y,z) = (4\pi t)^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)$$

より

$$
\begin{aligned}
u_t &= \left[-\frac{3}{2}(4\pi)(4\pi t)^{-5/2} + (4\pi t)^{-3/2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)\right]\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right) \\
&= \frac{1}{4t^2}[-6t + (x^2+y^2+z^2)]\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right), \\
u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)\cdot(4\pi t)^{-3/2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right) \\
&= -\frac{x}{2t}\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right), \\
u_{xx} &= \left[-\frac{1}{2t} + \left(-\frac{x}{2t}\right)^2\right]\cdot(4\pi t)^{-3/2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right) \\
&= \frac{-2t+x^2}{4t^2}\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right), \\
u_{yy} &= \frac{-2t+y^2}{4t^2}\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right), \\
u_{zz} &= \frac{-2t+z^2}{4t^2}\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right).
\end{aligned}
$$

これから $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ がわかる。

2B$_1$

(1) $\forall a \in U\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (\forall x \in U\colon\ \|x-a\| < \delta)\ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$

(2) $\forall a \in U\ \exists A \in M(m, n; \mathbf{R})$ s.t. $f(a+h) - f(a) - Ah = o(\|h\|)\ (h \to 0).$

(3) f のすべての 1 階偏導関数が存在して、それが U で連続なこと。**詳しく言うと:** $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ とすると $1 \le \forall i \le m,\ 1 \le \forall j \le n$ に対して f の偏導関数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\colon U \to \mathbf{R}$ が存在して連続となること。ここで偏導関数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は $a \in U$ に対して f_i の a における x_j に関する偏微分係数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) := \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+he_j) - f(a)}{h}$ を対応させる関数のことである (e_j は第 j 成分が 1 で、他のすべての成分が 0 となるベクトルを表す)。

(4) まず $\begin{array}{ccccc} \text{(d)} & \Longrightarrow & \text{(c)} & \Longrightarrow & \text{(a)} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{(b)} & & \end{array}$ が成り立つ。矢印を逆向きにしたものは一般には成り立たない。

2B$_2$　もしもそういう f が存在したとすると

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1.
$$

となるが、f が C^2 級であることから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

が成り立つはずで、これは矛盾である。

3A

(1) $f(x,y) = \cos(x^3 + xy)$ とすると、

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\sin(x^3+xy)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^3+xy) = -(3x^2+y)\sin(x^3+xy), \\ f_y(x,y) &= -\sin(x^3+xy)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^3+xy) = -x\sin(x^3+xy). \end{aligned}$$

(2) $f(x,y) = \arccos\left(\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)$ とする。

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから、

$$f_x(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right).$$

ここで

$$\sqrt{1-\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}} = \frac{|x+y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot(-y)-(1-xy)\frac{2x}{2}(1+x^2)^{-1/2}}{(\sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{(1+x^2)(-y)-(1-xy)x}{(1+x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-(x+y)}{(1+x^2)^{3/2}(1+y^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

であるから

$$f_x(x,y) = -\frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}{|x+y|}\cdot\frac{-(x+y)}{(1+x^2)^{3/2}(1+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x+y}{|x+y|}.$$

同様にして

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{x+y}{|x+y|}.$$

(3) $f(x,y)=\log\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ とおくと $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(\log|x+y|-\log|x-y|\right)$.

$$f_x(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)=\frac{-y}{x^2-y^2},\quad f_y(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y+x}-\frac{1}{y-x}\right)=\frac{-x}{y^2-x^2}.$$

(4) $f(x,y)=\log\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とおくと $f(x,y)=-\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

$$f_x(x,y)=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=-\frac{x}{x^2+y^2},\quad f_y(x,y)=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

3B$_1$

$$\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= [\frac{1}{2}(A(x+h),x+h)+(b,x+h)+c]-[\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c] \\
&= \{\frac{1}{2}[(Ax,x)+(Ax,h)+(Ah,x)+(Ah,h)]+(b,x)+(b,h)+c\}-[\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x) \\
&= \frac{1}{2}[(Ax,h)+(Ah,x)+(Ah,h)]+(b,h) \\
&= (Ax,h)+(b,h)+\frac{1}{2}(Ah,h) \\
&= (Ax+b,h)+\frac{1}{2}(Ah,h).
\end{aligned}$$

ここで

$$|(Ah,h)|\le\|Ah\|\|h\|\le\|A\|\|h\|^2$$

より

$$\frac{1}{2}(Ah,h)=O(\|h\|^2)=o(\|h\|)\quad(h\to 0)$$

であるから

$$f(x+h)-f(x)-(Ax+b,h)=o(\|h\|)\quad(h\to 0).$$

ゆえに $f'(x)=Ax+b$.

3B$_2$

$$F(x,y,z):=\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}-1$$

とおくと

$$\nabla F=\begin{pmatrix}2x\\ y\\ \frac{2}{3}z\end{pmatrix}$$

であるから、$F(x,y,z)=0$ 上の点 (x,y,z) における法線ベクトルとして $\begin{pmatrix} 2x \\ y \\ \frac{2}{3}z \end{pmatrix}$ が取れる。

さて点 (x_0,y_0,z_0) が接点であるための必要十分条件は、次の (1)-(3) が成り立つことである:

$$\frac{(x_0)^2}{1}+\frac{(y_0)^2}{2}+\frac{(z_0)^2}{3}=1, \tag{3}$$

$$x_0+y_0+z_0=k, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_0 \\ y_0 \\ \frac{2}{3}z_0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

この (5) は

$$\exists\lambda\in\mathbf{R}\quad \text{s.t.}\quad \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ \frac{2}{3}z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\quad \text{i.e.}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda \\ \frac{3}{2}\lambda \end{pmatrix}$$

となるが、これを (3) に代入して整理して

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

を得る。(4) に代入して

$$k=x+y+z=\frac{\lambda}{2}+\lambda+\frac{3}{2}\lambda=3\lambda=\pm\sqrt{6}.$$

4A

$$f_x(x,y)=(1-2x^2)ye^{-x^2-y^2},\quad f_y(x,y)=(1-2y^2)xe^{-x^2-y^2}$$

であるから

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-2x^2)ye^{-x^2-y^2} \\ (1-2y^2)xe^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y)=0 \quad &\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (1-2x^2)y=0 \\ (1-2y^2)x=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow\quad (x,y)=0 \quad \text{または} \quad (x,y)=\begin{pmatrix} \pm1/\sqrt{2} \\ \pm1/\sqrt{2} \end{pmatrix}(\text{複号任意}) \end{aligned}$$

さて

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}f_x=2xy(2x^2-3)e^{-x^2-y^2},\quad f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}f_x=(1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}, \\ f_{yx} &= f_{xy}=(1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2},\quad f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}f_y=2xy(2y^2-3)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

であるから f の Hesse 行列を H とすると

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy(2x^2-3)e^{-x^2-y^2} & (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \\ (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} & 2xy(2y^2-3)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

(i) $(x, y) = (0, 0)$ のとき、$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で $\det H = -1 < 0$ ゆえ、これは不定符号。ゆえに極値点ではない。

(ii) $(x, y) = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ のとき $H = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$. で、$H$ の固有値がともに $-2e^{-1}$ で負なので、H は負値。ゆえに極大となる。極大値は $\dfrac{1}{2e}$.

(iii) $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ (複号同順) のとき、$H = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$ で、H の固有値がともに $2e^{-1}$ で正なので、H は正値。ゆえに極小となる。極大値は $-\dfrac{1}{2e}$.

5A

(1) **定理 9.1 (陰関数定理 (implicit function theorem))** Ω を $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ を C^1 級の関数とする。さらに点 $(a, b) \in \Omega$ において $F(a, b) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ は逆行列を持つとする。
$\Longrightarrow$ $\exists U$: a を含む開集合 ($\subset \mathbf{R}^m$), $\exists V$: b を含む開集合 ($\subset \mathbf{R}^n$), $\exists \varphi\colon U \to V$: C^1 級の関数 s.t.

(i) $\varphi(a) = b$.

(ii) $\forall (x, y) \in U \times V$ について

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

すなわち $U \times V$ において、F の零点集合は φ のグラフに一致する:

$$(U \times V) \cap N_F = \operatorname{graph} \varphi,$$

ただし

$$N_F := \{(x, y) \in \Omega; F(x, y) = 0\}, \quad \operatorname{graph} \varphi := \{(x, \varphi(x)); x \in U\}.$$

(iii) $\varphi'(x) = -\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))^{-1} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))$.

(2) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ とおくと $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は C^1 級で、$f_y(x, y) = 3y^2 - 2x$. ゆえに $f_y(1, 1) = 3 \cdot 1^1 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0$ であるから $(1, 1)$ の近傍で $f(x, y) = 0$ は $y = g(x)$ と解ける。$f_x(x, y) = 3x^2 - 2y$ より $f_x(1, 1) = 3 \cdot 1^1 - 2 \cdot 1 = 1$ であるから

$$g'(1) = -\frac{f_x(1, 1)}{f_y(1, 1)} = -\frac{1}{1} = -1.$$

5B

$$X = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_1(X,Y) = x+y+z+w, \quad f_2(X,Y) = e^x + e^{2y} + e^z + e^w - 4, \quad f(X,Y) = \begin{pmatrix} f_1(X,Y) \\ f_2(X,Y) \end{pmatrix}$$

とおくと $f\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \ni (X,Y) \longmapsto f(X,Y) \in \mathbf{R}^2$ は C^1 級で、

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(X,Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^x & 2e^y \end{pmatrix}.$$

これから

$$\det \frac{\partial f}{\partial Y}(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

ゆえに $f(X,Y) = 0$ は 0 の近傍で Y について解ける。いいかえると (x,y) について解ける。

10　1994年度

10.1　1994年度 微分積分学I· 同演習 試験問題

(1994 年 7 月 18 日)
以下の 5 問の中から 4 問を選んで解答せよ。

1.　多変数ベクトル値関数について、 (1) 微分可能性の定義を書け。 (2) 以下の４つの条件の間の関係を述べよ。 (a) 微分可能, (b) 各変数について偏微分可能, (c) 連続, (d) 連続微分可能。

2.　(1) U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon U \to V$ を C^1 級の全単射で逆写像も C^1 級であるものとする。$x \in U$ に対して $f(x) = y$ とおくとき、合成関数の微分法を用いて、$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$ を示せ。
(2) $U = \{(r,\theta); r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ とおく。$f\colon U \ni (r,\theta) \longmapsto (x,y) \in \mathbf{R}^2$ を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と定めるとき、以下のものを求めよ。
(a) f のヤコビ行列 $f'(r,\theta)$. (b) f^{-1} のヤコビ行列 $(f^{-1})'(x,y)$. (c) $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$.

3.　r を正定数とするとき、$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ とおく。(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 (a,b,c) における接平面を求めよ。

4.　$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

5. (1) 陰関数定理を書け。
(2) 変数 $x,\ y,\ z,\ u,\ v$ の間に $xy+uv=0,\quad x^2+y^2+z^2=u^2+v^2$ の関係があるとする。点 $(x,y,z,u,v)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1,1,2)$ の近傍において、これを $u,\ v$ について解けることを示せ。さらに $(x,y,z)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ における $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$ の値を求めよ。

10.2 1994年度 微分積分学I·同演習 試験結果について講評

後期の最初の講義で解答例を示し、必要な説明をするが、間が空いてしまうので、いくつかコメントしておく。

1. 多変数ベクトル値関数について、(1) 微分可能性の定義を書け。(2) 以下の４つの条件の間の関係を述べよ。(a) 微分可能, (b) 各変数について偏微分可能, (c) 連続, (d) 連続微分可能。

この種の問題は出す[5]と明言していて、練習問題にも含めておいたのだから、点を稼いでもらえると考えていた（大ハズレだった）。解答した人の中では (1) の出来はまあまあだったが、(2) の結果は散々であった。講義で「(a) $\Longrightarrow$ (b)」、「(a) $\Longrightarrow$ (c)」、「(d) $\Longrightarrow$(a)」は証明してある。この三つだけ書いてもらえば良いと考えていた。これから自明に分かる (d)$\Longrightarrow$(b), (d)$\Longrightarrow$(c) 以外は、すべて反例がある。（反例については講義で紹介しなかったかもしれないが、練習問題にしたのだから、成り立つかどうかだけは、自分で調べておくべきである。）(b) という条件が非常に弱いもので、それだけではほとんど何も使いようがないことをもっと強調すべきだったと反省している。「(c)$\Longrightarrow$(a) （つまり、連続 $\Longrightarrow$ 微分可能）」という解答もあったが、ちょっとマズイ（「微分可能ならば連続だけど、逆はダメ」くらいは常識のはず）。

2. (1) U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon U\to V$ を C^1 級の全単射で逆写像も C^1 級であるものとする。$x\in U$ に対して $f(x)=y$ とおくとき、合成関数の微分法を用いて、$(f^{-1})'(y)=(f'(x))^{-1}$ を示せ。
(2) $U=\{(r,\theta); r>0, -\pi<\theta<\pi\}$ とおく。$f\colon U\ni(r,\theta)\longmapsto(x,y)\in\mathbf{R}^2$ を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と定めるとき、以下のものを求めよ。
(a) f のヤコビ行列 $f'(r,\theta)$. (b) f^{-1} のヤコビ行列 $(f^{-1})'(x,y)$. (c) $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \dfrac{\partial\theta}{\partial y}$.

陰関数定理のところで、定理（陰関数の存在）の証明自体は難しいが、導関数の公式については、暗記しなくても、合成関数の微分法を用いて機械的に導けることを強調した。その逆関数版を尋ねたのが (1) であるが、誰も出来ていなかった（残念）。証明は二行足らず「$f^{-1}(f(x))=x$ $(x\in U)$ の両辺を微分すると (合成関数の微分法より) $(f^{-1})'(f(x))f'(x)=I$ (I は単位行列) となることから、 $(f^{-1})'(f(x))=[f'(x)]^{-1}$ $\therefore (f^{-1})'(y)=[f'(x)]^{-1}$.」よーく考えてみよう。(2) について、ヤコビ行列を知らなかったり、ヤコビ行列式と勘違いした人が少なからずいたのは、ひどい。とはいえ (2-a),(2-b) の出来は全体としてはまあまあであった。(2-c) は (2-b) の結果からすぐ（計算なしで）出てくるものなのに、独立に計算して間違えている人が大勢いた。複雑で下手をすると訳の分からなくなってしまう計算を見通し良く遂行するために、一見抽象

[5]初回の講義の際に配ったプリントで強調したように、重要な概念は、その定義を書けるようにしなければいけない。

的にも見える定理の存在意義がある[6]のだから、よく検討しておくこと。それから、$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial r}}$ という、よくある間違いがあったが、試験を受ける段階でまだこうしているのはマズイ。行列として逆を取らなければだめ。つまり、

$$f(r,\theta)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad f'(r,\theta)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

そして

$$f^{-1}(x,y)=\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \left(f^{-1}\right)'(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

逆関数の微分の公式 $\left(f^{-1}\right)'(x,y)=\left(f'(r,\theta)\right)^{-1}$ から

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1}.$$

注： $\theta=\tan^{-1}(y/x)$ という式を使った人がいた。多くの本に載っているが、ウソのある公式なので、使ってはいけない（今回はこれで減点はしなかった）。

3. r を正定数とするとき、$f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ とおく。(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 (a,b,c) における接平面を求めよ。

まず ∇ を覚え間違いしている答案があった（重罪)。(2) は $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ とおいて法線ベクトル $\nabla F(a,b,c)$ を求めた人、接線の方程式の拡張になっている公式 $z-c=\nabla f(a,b)\cdot(x-a,y-b)$ を使った人、半々くらいだったが、出来はまあまあだった。$c=\sqrt{r^2-a^2-b^2}$ であるから、結果は色々な表し方があるが、そこで減点はしなかった。($a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0$ とか、$ax+by+cz=r^2$ などがきれいと思うけど。)

4. $f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

これも出来はまあまあである。単純な計算ミスについては、一度間違えても、その後の計算自体が正しければ、中間点をつけている。**細かい注意：**Hesse 行列のことを断りなしに H と書く人がいるが、マズイ。f の gradient を grad$f$ と書いたり ∇f と書くのは、少なくとも微積分の話をしている時には、常識として認められるが、説明なしに、アルファベット一文字 H で Hesse 行列を表すというのは、ずぼらに過ぎる。講義ではよほど忙しい時以外は、「f の Hesse 行列 H」と書いたし、忙しくて板書しなかった時も、言葉ではしゃべったはずである。(高校数学で 2 次方程式の話をしていて、いきなり D と書いたら、判別式のことであると解

[6]それだけではないけど。

釈するのだろうが、こういうものも本当は説明しておくべきである。) それから $2y+2xy=0$ を割算して $x=-1$ とするなど（当然 $2y(1+x)=0$ から $x=-1$ または $y=0$ となる）方程式を解き損ねている人が結構いた。

5. (1) 陰関数定理を書け。
(2) 変数 x, y, z, u, v の間に $xy+uv=0, \quad x^2+y^2+z^2=u^2+v^2$ の関係があるとする。点 $(x,y,z,u,v)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1,1,2)$ の近傍において、これを u, v について解けることを示せ。さらに $(x,y,z)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ における $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$ の値を求めよ。

定理を機械的に覚えているせいか、それとも数学的な言いまわしに慣れていないのか、予想通り (1) の出来がぱっとしない。明確な間違い以外にも、次のような点で採点者の神経が逆撫でされた（今回は甘く採点したけど）：

- $\subset$ と $\in$ の混同
- 開集合であることを明示しないもの（これを省くと正確さが落ちるか、かえって面倒になる）
- 滑らかさの仮定（関数が C^1 級であること）を書き落とすもの
- 同じ条件を断りなしに[7] 異なった表現で二重・三重に書いてあるもの (「C^1 級で、、、微分可能で、、、導関数が連続」 — 解答者が理解しているのか、とても不安になる）
- ヤコビ行列の逆関数と書くもの（やはり「逆行列」としてほしい。行列を線形写像と同一視しているつもりかな？）
- どこまでが仮定で、どこからが（仮定から導かれる）結果なのかの境界が曖昧なもの

ベクトル変数について解く例は講義でやらなかったが、(2) をきちんと解いている人がいたのは心強い。要するに、$F_1(x,y,z,u,v)=xy+uv$, $F_2(x,y,z,u,v)=x^2+y^2+z^2-(u^2+v^2)$, $F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ とおいて、$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}$ が逆行列を持つことをチェックする。

定理の記号に近付けると、$X=(x,y,z)$, $Y=(u,v)$ として、$F(X,Y)=0$ を Y について $Y=\varphi(X)$ と解く問題となる。

$$\frac{\partial F}{\partial Y}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial X}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

より、陰関数 $Y=\varphi(X)$ の導関数は

$$\varphi'(X)=-\left(\frac{\partial F}{\partial Y}(X,\varphi(X))\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial X}(X,\varphi(X))=-\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

この結果は 2×3 行列であるが、その成分が $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$ になっているわけである (問題 2 と同様)。

[7] 例えば「すなわち」とか「言い換えると」のような断りの言葉を添えて、複雑なことを言い換えるのは有用で、講義でもよく使った。

10.3　1994 年度 微分積分学 I· 同演習 試験問題 (追)

(1994 年 7 月 23 日)
以下の 7 問の中から 4 問を選んで解答せよ。

1.　多変数ベクトル値関数について以下の問に答えよ。(1) 連続性の定義を書け。(2) 微分可能性の定義を書け。(3) 連続微分可能 (= C^1 級である) とはどういうことか、説明せよ。

2.　(1) A を実数を成分とする $m \times n$ 行列, $b \in \mathbf{R}^m$ とする。$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を $f(x) = Ax + b$ で定義するとき、ヤコビ行列 $f'(x)$ を求めよ。(一般の次元で考えにくければ、$m = n = 3$ として解答せよ。) (2) $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を $g(x) = x$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ で定めるとき、ヤコビ行列 $g'(x)$ を求めよ。

3.　$U = \{(r, \theta, t); r > 0, -\pi < \theta < \pi, t \in \mathbf{R}\}$ とおく。$f\colon U \ni (r, \theta, t) \longmapsto (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = t$ と定めるとき、以下のものを求めよ。
(1) f のヤコビ行列 $f'(r, \theta, t)$. (2) f^{-1} のヤコビ行列 $(f^{-1})'(x, y, z)$. (3) $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$.

4.　曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (a, b, c は正の定数) 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ。

5.　$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x, y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

6.　(1) 逆関数定理を書け。
(2) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $f_1(x, y) = x^2 - y^2$, $f_2(x, y) = 2xy$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で f の逆写像が存在することを示せ。特に $(1, 0)$ の近傍における f の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

7.　条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ のもとでの $f(x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^3$ の最大値と最小値を求めよ。

10.4　1994 年度 微分積分学 I· 同演習 特別試験問題

(1994 年 9 月 18 日)
以下の 5 問の中から 4 問を選んで解答せよ。

1.　多変数ベクトル値関数について、以下の問に答えよ。(i) 連続性の定義を書け。(ii) 微分可能性の定義を書け。(iii) 連続微分可能性の定義を書け。(iv) 微分可能ならば連続であることを示せ。

2. $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。

(i) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ。(ただし $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ とする。)

(ii) f_x, f_y はいずれも原点で不連続であることを示せ。

3. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ の極値を求めよ。

4. $f\colon \mathbf{R}^3 \ni (u,v,w) \longmapsto (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ を $x = u(1-v)$, $y = uv(1-w)$, $z = uvw$ で定める時、f のヤコビ行列式を求めよ。

5. 方程式 $f(x,y,z) = x^2 + (x - y^2 + 1)z - z^3 = 0$ は点 $(0,0,1)$ の近傍で z について解けることを示せ。また、その点における $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ の値を求めよ。

11 1993 年度

11.1 1993 年度 微分積分学 I· 同演習 試験問題

(1993 年 7 月 19 日)

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を書け。
(2) $\mathbf{R}^N$ の開集合の実例 (全空間、空集合以外のもの) をあげよ。
(3) (2) であげた例が開集合になっていることを示せ。

2. (1) A を実数を成分とする $m \times n$ 行列として、 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を $f(x) = Ax$ で定める。この時 x における f のヤコビ行列を求めよ。
(2) A を n 次実対称行列、$b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ として、$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ で定める。この時 $\nabla f(x)$ を求めよ。

3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) f の Hesse 行列を求めよ。
(3) f の極値を求めよ。

4. (1) 陰関数定理を書け。
(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $P = (1,1)$ とする。 $f(x,y) = 0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y = g(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

11.2　1993 年度 微分積分学 I· 同演習 試験問題

(1993 年 7 月 24 日)

1.　(1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を書け。
(2) $\mathbf{R}^N$ の開集合の実例 (全空間、空集合以外のもの) をあげよ。
(3) (2) であげた例が開集合になっていることを示せ。

2.　$a \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}$ として、 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = (a, x) + b$ で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) ∇f を求めよ。
(2) 曲面 $f(x) = 0$ の点 x_0 における接超平面の方程式を求めよ。

3.　$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x, y)$ を求めよ。
(2) f の Hesse 行列を求めよ。
(3) f の極値を求めよ。

4.　(1) 陰関数定理を書け。
(2) $f(x, y) = x^2 + y + \sin xy$, $P = (0, 0)$ とする。 $f(x, y) = 0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y = g(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

11.3　1993 年度 微分積分学 I・同演習 試験問題

(1993 年 7 月 27 日)
以下の 5 問に解答せよ (**1**〜**4** までで 100 点)。途中経過もていねいに書くこと。

1.　(1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を書け。
(2) $\mathbf{R}^N$ の開集合の実例 (全空間、空集合以外のもの) をあげよ。
(3) (2) であげた例が開集合になっていることを示せ。

2.　(1) A を実数を成分とする $m \times n$ 行列として、 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を $f(x) = Ax$ で定める。この時 x における f のヤコビ行列を求めよ。
(2) A を n 次実対称行列、$b \in \mathbf{R}^n, c \in \mathbf{R}$ として、 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ で定める。この時 $\nabla f(x)$ を求めよ。
第 **2** 問のかわりに次の問題を解答してもよい（つまり選択問題)。

2'.　$a \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}$ として、 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = (a, x) + b$ で定めるとき、次の問に答えよ。
(1) ∇f を求めよ。
(2) 曲面 $f(x) = 0$ の点 x_0 における接超平面の方程式を求めよ。

3. a を 0 でない実定数とする時、$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) f の Hesse 行列を求めよ。
(3) f の極値を求めよ。

4. (1) 逆関数定理を書け。
(2) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $f_1(x,y) = x^2 - y^2$, $f_2(x,y) = 2xy$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で f の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の近傍における f の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

5. 開集合でない集合の例をあげ、それが開集合でないことを示せ。

11.4 1993 年度 微分積分学 I・同演習 試験問題

(1993 年 7 月 27 日)
以下の 5 問に解答せよ (**1**〜**4** までで 100 点)。途中経過もていねいに書くこと。

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を書け。
(2) $\mathbf{R}^N$ の開集合の実例 (全空間、空集合以外のもの) をあげよ。
(3) (2) であげた例が開集合になっていることを示せ。

2. $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = 6x^2 - xy^3 + 2y^4$ のグラフ $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; z = f(x,y)\}$ 上の点 $(1,1,7)$ における接平面と法線を求めよ。

3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) f の Hesse 行列を求めよ。
(3) f の極値を求めよ。

4. (1) 逆関数定理を書け。
(2) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $f_1(x,y) = x^2 - y^2$, $f_2(x,y) = 2xy$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で f の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の近傍における f の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

5. 開集合でない集合の例をあげ、それが開集合でないことを示せ。

参考文献

[1]