多変数の微分積分学1 第7回

桂田 祐史

2011年5月23日 (月)

この授業用の WWW ページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

多変数関数の極限の演習

問3　つぎの極限値が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。
(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2-y^2)$. (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$. (3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}$. (4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}$.
(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$. (6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. (8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}$.
(締切は5月30日の授業開始時。)

極限の問題を必ず解く方法などは存在しない (問題が幅広すぎる)。しばしば役立つ手段を3つほど紹介する (これらで上の問題は解ける)。

- f が (a,b) で連続ならば、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)$.
- $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=b$, $\displaystyle\lim_{y\to b}g(y)=c$ ならば、$\displaystyle\lim_{x\to a}g(f(x))=c$. これは a, b, c が有限でない場合も成立する。1変数関数の極限 (高校数学にも登場) に関する知識が役立つケースが結構ある。
- 特定の近づけ方を考えることで、1変数の極限を調べることで当りをつける。以下、二つほど例をあげる。

  (a) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $((x,y)\ne(0,0))$ とするときの $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ を求めよ。
  直線 $y=kx$ (k はある定数) に沿って (x,y) を $(0,0)$ に近づけたときの極限を求めてみる。

$$\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

  もし $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=A$ となる A があれば、$A=\dfrac{k}{1+k^2}$ のはずだが、右辺は k の値によって異なる値を取るので矛盾である。ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在しない。

(b) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$ とするときの $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を求めよ。

直線 $y=kx$ (k はある定数) に沿って (x,y) を $(0,0)$ に近づけたときの極限を求めてみる。

$$\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}x=0.$$

もし $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A$ となる A があれば、$A=0$ のはずである。実際に $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ となることを証明しよう。

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}|y|\le\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|y|=|y|.$$

$\|(x,y)-(0,0)\|\to 0$ のとき、すなわち $\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ のとき、$|y|\to 0$ であるから (なぜならば $|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$)、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.\blacksquare$$

偏微分の順序交換

定理 0.1 Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}^m$ は C^2 級とするとき、任意の $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $a\in\Omega$ に対して、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a).$$

$i=j$ のときは明らかに成立するので、$i\neq j$ の場合の証明が問題となる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+he_i)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\lim_{k\to 0}\frac{f(a+he_i+ke_j)-f(a+he_i)}{k}-\lim_{k\to 0}\frac{f(a+ke_j)-f(a)}{k}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{1}{hk}\left(f(a+he_i+ke_j)-f(a+he_i)-f(a+ke_j)+f(a)\right)\end{aligned}$$

であり、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{1}{hk}\left(f(a+he_i+ke_j)-f(a+he_i)-f(a+ke_j)+f(a)\right)$$

である。極限の順序の問題であることが分かる。実は

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{hk}\left(f(a+he_i+ke_j)-f(a+he_i)-f(a+ke_j)+f(a)\right)$$

が存在するので、両者は一致する、というのがあらすじである。

証明　$i=j$ の場合に成り立つことは明らかなので、$i \neq j$ の場合を証明する。x_i と x_j 以外の変数 x_k $(k \neq i, j)$ は、$x_k = a_k$ と固定しているので、本質的に 2 変数関数の話である。$x_i = x$, $x_j = y$, $a_i = a$, $a_j = b$, $f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \ldots, a_n) = f(x, y)$ として、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

を示せば良い。

$$\Delta(h,k) := f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$$

とおく[1]。$\phi(x) := f(x, b+k) - f(x, b)$ とおくと、十分小さな正数 ε を取ると、$0 < |h| < \varepsilon$, $0 < |k| < \varepsilon$ を満たす任意の h, k に対して、$\exists \theta, \theta' \in (0,1)$ s.t.

$$\begin{aligned}
\Delta(h,k) &= \phi(a+h) - \phi(a) \\
&= \phi'(a+\theta h)h = \left[f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)\right] h \\
&= f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)hk.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k) = f_{xy}(a,b).$$

同様に $\psi(y) := f(a+h, y) - f(a, y)$ とおくと、$0 < |h| < \varepsilon$, $0 < |k| < \varepsilon$ を満たす任意の h, k に対して、$\exists \theta'', \theta'' \in (0,1)$ s.t.

$$\Delta(h,k) = \psi(b+k) - \psi(b) = f_{yx}(a+\theta''' h, b+\theta'' k)hk.$$

これから

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yx}(a+\theta''' h, b+\theta'' k) = f_{yx}(a,b).$$

ゆえに

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b). \blacksquare$$

余談 0.1 (細かい注意)　この定理の仮定がどこまで弱められるか考えてみよう。いくつかの結果があるが (高木 [1] などを見よ)、次が重要であると筆者は考える。

$$f \text{ が 2 回全微分可能であれば、} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

ところが「2 回全微分可能」という概念の定義を省略するテキストが多い。f が Ω で 2 回全微分可能であるとは、f が Ω で全微分可能で、すべての偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ が Ω で全微分可能なことをいう。この定義は極めて自然なのだが、それを説明するのに案外と手間がかかるので (扱う関数の範囲を少し広げると (例えばシュヴァルツ [2])、導関数 $x \mapsto f'(x)$ の導関数が定義できるので、2 回微分可能の概念が自然に確定する。それはすべての 1 階偏導関数が全微分可能なことと同値であるのはすぐ分かる。)、ここでは省略する。 ■

[1] これは二つの差分を施したものであり、それらは順序交換可能である:

$$\Delta(h,k) = \left[\left[f(x,y)\right]_{x=a}^{x=a+h}\right]_{y=b}^{y=b+k} = \left[\left[f(x,y)\right]_{y=b}^{y=b+k}\right]_{x=a}^{x=a+h}.$$

応用上の観点からは、2 回全微分可能であるが、C^2 級ではないような関数が登場することは稀なので、上の余談に述べたことを気にする必要はほとんどない。それが現在の微分積分学のテキストの多くで、高階の全微分の概念が省略される理由であろう。

参考文献

[1] 高木貞治：解析概論 改訂第 3 版, 岩波書店 (1961).

[2] L. シュヴァルツ：シュヴァルツ解析学 2 微分法, 東京図書 (1970).