多変数の微分積分学1 第9回

桂田 祐史

2011年5月30日 (月)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

問3の略解

問3　つぎの極限値が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。
(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2-y^2)$. (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$. (3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}$. (4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}$.
(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$. (6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. (8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}$.

解答

(1) $f(x,y):=x^2-y^2$ は多項式なので、関数 $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ は連続である。特に $(1,2)$ で連続であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}f(x,y)=f(1,2)=1-4=-3.$$

(2) $f(x,y):=\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$ は有理式で、分母が 0 にならない範囲 $\Omega:=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で定義された関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ は連続である。特に $(0,1)\in\Omega$ で連続であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}f(x,y)=f(0,1)=1.$$

(3) 有理関数で、$(0,0)$ で分母が 0 になることに注意する。$f(x,y):=\sqrt{x^2+y^2}$, $g(z):=\dfrac{1}{z^2}$ とするとき、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$, $\displaystyle\lim_{z\to0}g(z)=\infty$ であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(f(x,y))=\lim_{z\to0}g(z)=\infty.$$

(4) $(x,y)\to(0,0)$ のとき、分子 $=x+y\to0$, $x^2+y^2\to+0$, 分母 $=\log(x^2+y^2)\to-\infty$ であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}=0.$$

(5) いわゆる不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。近づく方向を限定して考えてみると何か分かることがある。x 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{y=0\\(x,y)\to(0,0)}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x+0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

y 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{x=0\\(x,y)\to(0,0)}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-y}{0+y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1.$$

2 つの極限が一致しないので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ は存在しない。

(6) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。x 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{y=0\\(x,y)\to(0,0)}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+0^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}.$$

この極限は存在しない (右極限 $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{x}{|x|} = 1$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{x}{|x|} = -1$ は一致しない)。ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ も存在しない。

(7) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。x 軸, y 軸や、$y=kx$ (k は定数) にそっての極限は、すべて 0 であることが分かる。実際例えば

$$\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(kx)^2}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{1+k^2} = 0.$$

これから 0 に収束しそうだと見当をつけて証明を考える。

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = x^2\frac{y^2}{x^2+y^2} \le x^2\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = x^2.$$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき右辺は 0 に収束するので (これは極限の定義に戻れば簡単に示せる、あるいは右辺 $x^2 =: r(x,y)$ は x と y の多項式なので、r は関数として連続であり、$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r(x,y)\to r(0,0) = 0^2 = 0$, としても良い)、挟み撃ちの原理から

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

(8) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。$f(x,y) := xy$, $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$, $a = (0,0)$, $b = 0$, $c = 1$ とおくと、

$$\lim_{(x,y)\to a} f(x,y) = b, \quad \lim_{z\to b} g(z) = c$$

であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\to a} g(f(x,y)) = \lim_{z\to b} g(z) = c = 1.$$

全微分可能な関数の性質

前回、次の定理を紹介したが、証明はまだ与えていなかった。

定理 0.1 (全微分可能ならば、連続かつすべての変数について偏微分可能) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $a \in \Omega$, f は a で全微分可能とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) f は a で連続である。

(2) f は a で、すべての変数 x_j について偏微分可能で、

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right).$$

証明 f が a で全微分可能であるから、$\exists A \in M(m,n;\mathbf{R})$ s.t.

$$(\sharp) \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{\|h\|} = 0.$$

(1) $h \to 0$ のとき、$\|Ah\| \le \|A\|\,\|h\| \to 0$ であるから、$\|Ah\| \to 0$ であることに注意しておく。

$$f(a+h)-f(a) = f(a+h)-f(a)-Ah+Ah = \|h\|\,\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{\|h\|} + Ah$$

であるから、$h \to 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\|f(a+h)-f(a)\| &= \left\|\|h\|\,\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{\|h\|} + Ah\right\| \\ &\le \|h\|\,\frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|}{\|h\|} + \|Ah\| \to 0\cdot 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$

すなわち f は a で連続である。

(2) 突然だが、ベクトルを表す文字の上に $\vec{}$ を書くことにする。$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ とおくと

$$(\text{再掲 } \sharp) \qquad \lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{\vec{f}(\vec{a}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{a})-A\vec{h}}{\left\|\vec{h}\right\|} = \vec{0}.$$

において、第 i 成分は、

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{f_i(a+h)-f_i(a)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}h_k}{\left\|\vec{h}\right\|} = 0.$$

$j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して、$\vec{h} = h\vec{e_j}$ とすると、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(a+h) - f_i(a) - \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot h\delta_{kj}}{|h|} = 0.$$

これから

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(a+h) - f_i(a)}{h} = a_{ij}.$$

ゆえに f は a で変数 x_j につき偏微分可能で、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = a_{ij}.$$

ゆえに

$$f'(a) = A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right). \blacksquare$$

この定理によって、f が全微分可能であるとき、その全微分係数は偏微分することで求められることが分かった。偏微分は本質的に 1 変数関数の世界の話であるから、簡単に実行できることが多い。

与えられた関数が全微分であることがどうしたら分かるか？というのが問題になるが、これについては次の定理が有用である。

定理 0.2 (C^1 級ならば全微分可能) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ は C^1 級とするとき、f は Ω で全微分可能である。

証明 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ とおくとき、

$$\begin{aligned} f \text{ が } C^1 \text{ 級} \quad &\Leftrightarrow \quad f_i \text{ が } C^1 \text{ 級 } (i = 1, \ldots, m) \\ f \text{ が全微分可能} \quad &\Leftrightarrow \quad f_i \text{ が全微分可能 } (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

であるから、$m = 1$ として証明すれば良い。

Ω が開集合であるから、$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a; \varepsilon) \subset \Omega$. 任意の $h \in \mathbf{R}^n$, $0 < \|h\| < \varepsilon$ に対して、

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) \\ &\quad + f(a_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3 \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \ldots, a_n + h_n) \\ &\quad + f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, a_3, a_4 + h_4, \ldots, a_n + h_n) \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\quad + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n). \end{aligned}$$

平均値の定理より、$\exists \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in (0, 1)$ s.t.

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + \theta_j h_j, a_{j+1} + h_{j+1}, \ldots, a_n + h_n) h_j.$$

ゆえに

$$f(a+h)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(h)h_j.$$

ただし、

$$\varepsilon_j(h):=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+\theta_j h_j,a_{j+1}+h_{j+1},\dots,a_n+h_n)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\quad(j=1,\dots,n).$$

$h\to 0$ のとき

$$\|(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+\theta_j h_j,a_{j+1}+h_{j+1},\dots,a_n+h_n)-a\|^2\le\sum_{j=1}^{n}h_j^2=\|h\|^2\to 0$$

であることと、f は C^1 級であると仮定したので $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ は連続であることから、

$$\varepsilon_j(h)\to 0.$$

ゆえに、三角不等式と、$|h_j|\le\|h\|$ $(j=1,\dots,n)$ であることを用いると、

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(h)h_j\right|}{\|h\|}\le\frac{\sum_{j=1}^{n}|\varepsilon_j(h)|\,|h_j|}{\|h\|}\le\sum_{j=1}^{n}|\varepsilon_j(h)|\to 0\quad(h\to 0).$$

ゆえに

$$\frac{f(a+h)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j}{\|h\|}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(h)h_j}{\|h\|}\to 0\quad(h\to 0).$$

これは f が a で全微分可能であることを示している。■

この定理の仮定は、f が C^1 級であることとしたが、f がすべての 1 階偏導関数を持ち、それらが連続であることしか上の証明では用いていない。つまり f の連続性は用いていないが、全微分可能であることが示されたので、定理 0.1 によって、f は連続である。ゆえに次のことが分かった。

系 0.3 f が C^1 級であるためには、f がすべての変数 x_j に関して偏微分可能で、$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ が連続であることが必要十分である。

これから、関数の 1 階偏導関数をすべて求めて (これは容易な場合が多い)、それらが連続関数であることが確められれば、その関数が全微分可能であることが分かる。これは与えられた関数が全微分可能であることの強力な確認手段である。