多変数の微分積分学1 第13回

桂田 祐史

2011年6月13日 (月)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

問6

次の関数の微分 f' を求めよ。(3) はヤコビアン $\det f'$ も求めよ。

(1) $f(x,y)=\begin{pmatrix} x^2y^3 \\ x+y^4\end{pmatrix}$ (2) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (3) $f(r,\theta,\phi)=\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\end{pmatrix}$.

解答

(1) $f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\end{pmatrix}$ とするとき、

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 1 & 4y^3\end{pmatrix}.$$

(2) a を定数とするとき、

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{d}{dx}\left(x^2+a\right)^{-1/2}=-\frac{1}{2}\left(x^2+a\right)^{-3/2}\cdot 2x=-\frac{x}{\left(x^2+a\right)^{3/2}}$$

であるから、

$$f'(x,y,z)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}=-\left(\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}},\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}},\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right).$$

(物理学に良く登場するポテンシャルの微分)

(3)

$$f'(r,\theta,\phi)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \phi}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \phi}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial r} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}.$$

ヤコビアンは

$$\begin{aligned}\det f'(r,\theta,\phi)&=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}\\ &=(-1)^{1+3}(-r\sin\theta\sin\phi)\begin{vmatrix}\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{vmatrix}\\ &\quad+(-1)^{2+3}r\sin\theta\cos\phi\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{vmatrix}\\ &=r^2\sin\theta\sin^2\phi+r^2\sin\theta\cos^2\phi=r^2\sin\theta.\blacksquare\end{aligned}$$

ヤコビアンは後で以下のようなところで必要になる。

- 逆関数の定理の仮定の条件のチェック
- 重積分 (多変数関数の積分) の変数変換 (ヤコビアンは、面積・体積の拡大率という意味がある)

空間極座標

空間に、互いに直交する座標軸 x 軸, y 軸, z 軸を取って座標を入れた xyz 座標系で、(x,y,z) という座標を持つ点 P の

- 原点からの距離を r
- z 軸の正方向となす角を θ $(0\le\theta\le\pi)$
- P を xy 平面に正射影した点を P' として、動径 $\overrightarrow{OP'}$ を x 軸の正の部分から反時計回りに測った角を ϕ $(0\le\phi<2\pi)$

とすると

$$\begin{cases}x&=&r\sin\theta\cos\phi\\ y&=&r\sin\theta\sin\phi\\ z&=&r\cos\theta\end{cases}$$

が成り立つ。このとき、r,θ,ϕ を P の**空間極座標** (**3 次元極座標**あるいは**球 (面) 座標**, **spherical coordinate**) と呼ぶ。

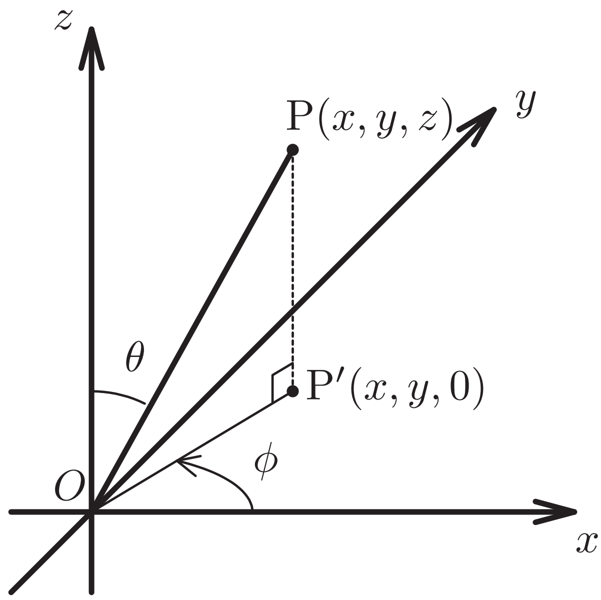

図 1: 球座標の θ, ϕ

θ と ϕ の測り方の違いに注意

注意 0.1 (極座標とのつきあい方) 3 次元以上の極座標の式には、色々なバリエーションがある。x 軸の正方向から測った角度を θ としたり ($x = r\cos\theta$ となる)、地球儀のように緯度・経度形式にしたり。ここに紹介した式を丸暗記するよりは、導出の仕方を理解して、自分で導出が出来るように練習しておくのが望ましい。■

学生との Q&A から

chain rule をゆっくりと

(これはぜひ説明する。)

前回の例 ($z = xy$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$) で

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

という chain rule を使ったが、これはどうやって出せるか (定理の「あてはめ」ですね)、という基本的 (ということは重要) な質問をされた。

z が 2 つの変数 x と y の関数である、つまり $z = z(x, y)$ であることを見て取るのが第 1 ステップである。すると、

$$\frac{\partial z}{\partial \boxed{}} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \boxed{}} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \boxed{}}$$

となる。この $\boxed{}$ に t を入れて出来上がり。

もし u が 3 変数 x, y, z の関数、つまり $u = u(x, y, z)$ であれば、

$$\frac{\partial u}{\partial \boxed{}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \boxed{}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \boxed{}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \boxed{}}$$

となる。

z_i が $y_1, \dots, y_m$ の関数、つまり $z_i = z_i(y_1, \dots, y_m)$ であれば、

$$\frac{\partial z_i}{\partial \boxed{}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial \boxed{}}.$$

全微分係数の一意性

(これは時間を埋めるために — 授業でしゃべれませんでした。)

f が a で全微分可能とは、

$$\exists A \in M(m, n; \mathbf{R}) \quad \text{s.t.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0$$

が成り立つことである。さらに「この A を f の a における全微分係数と呼び、 $f'(a)$ と表す」と続くのだが、A の一意性が証明されないとまずい (複数あるものを、一つの記号で示すのはおかしい)。それはちょっとしたクイズ・レベルの問題だが (答は自力で解こうとした人にしか教えない)、少し後の「f が a で全微分可能ならば、f は a で偏微分可能で、$f'(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$.」という定理の内容を先取りしても良い。つまり、次のようにする。

1. f が a で全微分可能ということを定義する。
2. f が a で全微分可能ならば、f は a ですべての変数 x_j について偏微分可能で、全微分可能性の定義に出て来る行列 A ($\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0$ を満たす行列 A) は、ヤコビ行列 $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ に等しい、という定理を述べる (証明は同じ!)。
3. f が a で全微分可能であるとき、$f'(a) := \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ とおき、f の a における全微分係数と呼ぶ、と定義し、$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{\|h\|} = 0$ となることを注意しておく。

こうすると、「全微分可能性」と「全微分係数」の定義が離れるのがタマにキズ。

例の追加

例 0.2 (変数の極座標変換、2 変数 1 階の場合) 関数の変数をデカルト座標から極座標に「変換」する、つまり関数 $f = f(x, y)$ が与えられたとき、

$$g(r, \theta) := f(x, y), \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

で定義される関数 g を考える — と分かりやすくなることが (非常にしばしば) ある。

$$g(r,\theta)=f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)$$

であるから、g は合成関数である。

$$g_r=f_x x_r+f_y y_r,\quad g_\theta=f_x x_\theta+f_y y_\theta$$

であり (これを $(g_r\ g_\theta)=(f_x\ f_y)\begin{pmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}$ と書くと、$(f\circ\varphi)'=f'\varphi'$)、

$$x_r=\cos\theta,\quad y_r=\sin\theta,\quad x_\theta=-r\sin\theta,\quad y_\theta=r\cos\theta$$

であるから、

$$g_r=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta,\quad g_\theta=-f_x r\sin\theta+f_y r\cos\theta.$$

実は g の 2 階偏導関数を f の偏導関数で表したり、逆に f の 2 階偏導関数を g の偏導関数で表すことが重要であるが、それはまた後で。 ■

余談 0.1 (ちんぷんかんぷんかも知れないが、お時間を拝借) 上の例は簡単だが、本質的に 2 変数の例となっている。つまり 1 変数関数の合成関数の微分法だけでは得られない。話が少し飛ぶようだが、1 変数関数から「組み立てられない[1]」という意味で本質的に多変数の関数の具体例はほとんど知られていない (皆無というわけではないらしいが、1 変数関数が豊富な具体例を持っているのとは対照的である)。従って、具体的な計算問題で、多変数関数の合成関数の微分法の定理が必要となるものを出題することは難しい。これは、本質的に多変数でない関数は応用上現れないということとは違う。応用上現れる関数のほとんどは具体的な式では書けない、ということである。■

逆関数の微分法

1 変数関数の場合の

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

に相当する定理がある。

定理 0.3 (逆関数の微分法) U と V は $\mathbf{R}^n$ の開集合で、$a\in U$, $b=\varphi(a)$, $\varphi\colon U\to V$ は全単射で、φ は a で、φ^{-1} は b で全微分可能であるならば、

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(b)=\left(\varphi'(a)\right)^{-1}.$$

(左辺の ${}^{-1}$ は逆関数を表し、右辺の ${}^{-1}$ は逆行列を表す。)

[1]大学 1 年生が知っているような 1 変数関数と、和・差・積・商、合成、テンソル積を取ることで得られる関数の意味。

証明　逆関数の定義により、

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x \quad (x \in U).$$

φ は a で、φ^{-1} は $b = f(a)$ で全微分可能であるから、合成関数の微分法より、

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(b)\varphi'(a) = I \quad (I \text{ は } n \text{ 次の単位行列})$$

が成り立つ。ゆえに $\left(\varphi^{-1}\right)'(b) = \varphi'(a)^{-1}$. ■

学生の質問から　$AB = I$ から $A = B^{-1}$ が結論出来るのですか？と尋ねられました。出来ます[2]。あるいは、$\varphi(\varphi^{-1}(y)) = y$ $(y \in V)$ から、$\varphi'(a)\left(\varphi^{-1}\right)'(b) = I$ が得られるので、結局

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(b)\varphi'(a) = \varphi'(a)\left(\varphi^{-1}\right)'(b) = I.$$

多くのテキストで採用されている逆行列の定義 ($AB = BA = I$ のとき $A = B^{-1}$) より、$\left(\varphi^{-1}\right)'(b) = (\varphi'(a))^{-1}$. ■

問　$\varphi(x) = x$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ とするとき、$\varphi'(x) = I$ であることを示せ。
(解法 1) 一般に「$f(x) = Ax + b$ ならば $f'(x) = A$」であるから、$\varphi(x) = x = Ix + 0$ より、$\varphi'(x) = I$.
(解法 2) $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ とおくと、$\varphi_i(x) = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} x_i = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

であるから、$\varphi'(x) = (\delta_{ij}) = I$. ■

上の定理では微分可能な逆関数の存在を仮定しているが、実は $\det \varphi'(a) \neq 0$ という条件が成り立てば、局所的な逆関数の存在が導かれるという、**逆関数定理**がある。それはこの講義科目の終盤に解説する予定である。次の例で、逆関数の微分法を使って $\left(\varphi^{-1}\right)'$ を計算しているが、微分可能性を証明するには、本当は逆関数の定理のお世話になる必要があるだろう。

例 0.4 (極座標変換の逆変換のヤコビ行列 (とても重要)) $\varphi\colon (0, \infty) \times (0, 2\pi) \ni \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ は明らかに C^1 級であるから (実は C^∞ 級である)、全微分可能である。

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

[2] A が定める写像は全射、B が定める写像は単射ということはすぐ分かり、次元定理を使えば、どちらも全単射と分かります。行列で言うと、逆行列 B^{-1} の存在が分かり、そうすると、右から掛け算して、$A = B^{-1}$.

逆関数の微分法によって、$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \varphi^{-1}(x,y)$ の全微分係数は、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} &= \left(\varphi^{-1}\right)'(x,y) = \varphi'(r,\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\cos\theta\cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta}\begin{pmatrix} r\cos\theta & +r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ゆえに[3]

$$r_x = \cos\theta, \quad r_y = \sin\theta, \quad \theta_x = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}. \blacksquare$$

(**以下はやや脱線** — 無視してよろしい) この結果を逆関数の微分法を使わずに求めてみよう。$r = \sqrt{x^2+y^2}$ であるから、r_x と r_y は比較的簡単に得られる。

$$\begin{aligned}
r_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\
r_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

これらがそれぞれ $\cos\theta$, $\sin\theta$ に等しいことは容易に分かる[4]。θ の導関数の方は少し難しい。割と多くのテキストに

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

と書かれているが[5]、これは $\pmod{\pi}$ でしか正しくない式である。本当は、$\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ が主値 ($(-\pi/2,\pi/2)$ 内の値) を意味するとして、

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & ((x,y)\ \text{が第 1 象限内の点}) \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \pi & ((x,y)\ \text{が第 2,3 象限内の点}) \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + 2\pi & ((x,y)\ \text{が第 4 象限内の点}) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x=0\ \text{かつ}\ y>0) \\ \dfrac{3\pi}{2} & (x=0\ \text{かつ}\ y<0) \end{cases}$$

[3]こういう計算をするとき、ヤコビ行列の成分の並べ方を間違えると、とんでもない結果になってしまうことに注意しよう。

[4]例えば $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{r\cos\theta}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}} = \dfrac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta.$

[5]本当に困ったことである。C 言語のプログラムで、デカルト座標を極座標に直すには、`r=sqrt(x*x+y*y); theta=atan2(y,x);` のようにする。`theta=atan(y/x);` ではマズイ — というのは常識的なのだが、数学書の方が旧態依然のママなのは情けない。

となるはずである。

$$\frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

であることから、

$$\theta_x=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \theta_y=\frac{x}{x^2+y^2}$$

が導けるが、少々面倒である (例えば y 軸上でどうすれば良いか分かりますか？)。これがそれぞれ $-\dfrac{\sin\theta}{r}$, $\dfrac{\cos\theta}{r}$ に等しいことは容易に確められる。■

高階の導関数 (いんとろ)

(これは次回にまわす。)

要するに偏導関数を計算すれば良いので、既に述べたことと積の微分法くらいで計算はどんどん出来る。

偏微分方程式論からの有名な例を 2 つ紹介する。変数変換 (独立変数の変換は、要するに合成関数である！) をして「見方を変える」ことが重要なテクニックである。具体的に分からない関数 (なにしろ未知関数だから！) の合成関数の、高階の偏導関数の計算が必要になるのは仕方がない。

例 0.5 (1) $f\colon (x,y)\mapsto f(x,y)$ があるとき、

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad g(r,\theta):=f(x,y),$$

すなわち、

$$g(r,\theta):=f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

これは $\varphi(r,\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$ として、$g:=f\circ\varphi$ ということ。このとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$$

が成り立つ。ちなみに 3 変数バージョンは

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}\right)$$

となり、工夫なしに馬鹿正直に計算すると、1 時間半以上かかる (桂田先生調査)。

(2) $u\colon (x,t)\mapsto u(x,t)$, 定数 c があるとき、

$$\xi=x-ct,\quad \eta=x+ct,\quad v(\xi,\eta):=u(x,t),$$

すなわち

$$v(\xi, \eta) := u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c}\right).$$

このとき

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$$

が成り立つ。