多変数の微分積分学1 第16回

桂田 祐史

2011年6月23日 (木)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

問9

C^∞ 級の2変数関数 $f(x,y)$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$ と、$(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $(h,k)\in\mathbf{R}^2$ があるとき、

$$F(t) := f\left(a+th, b+tk\right) \quad (t\in\mathbf{R})$$

とおくとき、次の (1), (2) に答えよ[1]。　　——— 合成関数の微分法で、Taylorの定理の準備

(1) $F'(t)$, $F''(t)$, ... を (いくつか) 計算せよ。

(2) $F^{(m)}(t)$ $(m\in\mathbf{N})$ の公式を推測し、数学的帰納法で証明せよ。

前半は計算であるが、要点は次の二つ。

(a) chain rule

(b) f が C^2 級ならば $f_{xy}=f_{yx}$, f が C^3 級ならば

$$f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}, \quad f_{yyx}=f_{yxy}=f_{xyy}.$$

f が C^∞ 級ならば、f の偏導関数は、x で何回、y で何回偏微分したかで決まり、$\dfrac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p\partial y^q}$ だけで表すことが出来る。

多くの人が (1) で $F'''(t)$ くらいまでを計算できるくらいまで時間を取って、

$$F^{(m)}(t)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{\partial^m f}{\partial x^r\partial y^{n-r}}(a+th,b+tk)h^r k^{m-r}$$

を提示。$(a+b)^m$ を表す二項定理を思い出してもらう。

これは授業中に書かなかったが

$$F^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+th,b+tk).$$

これは極座標変換の例の前にやるのが正しいか？考えてみれば、これも多変数関数の合成関数の高階導関数だなあ。

[1](授業でやるけれど) n 変数関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ について、$F(t):=f(a_1+th_1,a_2+th_2,\cdots,a_n+th_n)$ とおき、上と同様のことを行なえ。

平均値の定理 (つづき)

平均値の定理をベクトル値関数に拡張することは出来ない。実数値関数の場合の定理の証明を振り返り、さかのぼると、実数値関数の最大値の存在まで行き着く。この証明を一般化するのが難しいことは理解できるであろう。ここでは一つの反例を示す。

例 0.1 $f\colon \mathbf{R}^2 \ni x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \in \mathbf{R}$ は明らかに C^∞ 級であり、全微分可能である。$a = 0$, $b = 2\pi$ とするとき、

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

一方

$$f'(x) = \begin{pmatrix} (\cos x)' \\ (\sin x)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

で、このノルムは $\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$ であるから、$f'(x) \neq 0$. 特に $\forall c \in (a,b)$ に対して、$f'(c)(b-a) \neq 0$. ゆえに $f(b) - f(a)$ と $f'(c)(b-a)$ は等しくなり得ない。 ■

多変数版 Taylor の定理

補題 0.2 Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合, $k \in \mathbf{N}$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は C^k 級, $a \in \Omega$, $h \in \mathbf{R}^n$, $[a, a+h] \subset \Omega$ とするとき、

$$F(t) := f(a + th) \quad (t \in [0,1])$$

とおくと、F は C^k 級で、$\forall m \in \{1, \ldots, k\}$ に対して、

$$\begin{aligned} F^{(m)}(t) &= \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_m \le n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(a+th) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m} \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ は非負整数} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m}} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(a+th) h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

証明 (半分だけ証明します。) m に関する帰納法を用いる。$m = 1$ に対しては、chain rule から

$$\begin{aligned} F^{(1)}(t) = F'(t) = \frac{d}{dt} f(a+th) = f'(a+th) \frac{d}{dt}(a+th) = f'(a+th)h \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i. \end{aligned}$$

これは $\displaystyle\sum_{1 \le i_1 \le n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a+th) h_{i_1}$ と書き直せる。ゆえに $m = 1$ のとき成立する。

m のとき成立する、すなわち

$$F^{(m)}(t) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_m \le n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(a+th) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m}$$

と仮定すると、

$$
\begin{aligned}
F^{(m+1)}(t) = \frac{d}{dt}F^{(m)}(t) &= \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_m \le n} \frac{d}{dt} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(a+th) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m} \\
&= \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_m \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_i \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(a+th) h_i \right) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m} \\
&= \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_m, i_{m+1} \le n} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m} \partial x_{i_{m+1}}}(a+th) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m} h_{i_{m+1}}.
\end{aligned}
$$

これは $m+1$ のときも成立することを示す。ゆえにすべての $m (\le k)$ について成立する。■

記号の約束: f の x における m 次の微分

$$
\begin{aligned}
(d^m f)_x(h) &:= \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_m \le n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(x) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m} \\
&= \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ は非負整数} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m}} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n}.
\end{aligned}
$$

これを使うと、

$$
F^{(m)}(t) = (d^m f)_x(h), \quad F^{(m)}(0) = (d^m f)_a(h).
$$