多変数の微分積分学1 第20回

桂田 祐史

2011年7月11日 (月)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

1 問10

問10

次の行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (11) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

解答

(1) 対角行列だから、固有値は対角成分の $1, 1$. ともに正だから正値である。

(2) 対角行列だから、固有値は対角成分の $-1, -2$. ともに負だから負値である。

(3) 対角行列だから、固有値は対角成分の $3, -1$. 正と負だから、不定符号である。

(4) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) - (-3)(-3) = \lambda^2 - 3\lambda - 7$ であり、固有値は $\dfrac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$ である。正と負だから不定符号であ

る。あるいは

$$\det A_1 = A_1 = 2 > 0, \quad \det A_2 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3^2 = -7 < 0$$

を見て、$\det A < 0$ であるから、不定符号である。

(5) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 - 2^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$ であり、固有値は 1, 5 である。共に正であるから正値である。あるいは

$$\det A_1 = A_1 = 3 > 0, \quad \det A_2 = \det A = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5 > 0$$

であるから、A は正値である。

(6) (これは前問の行列の -1 倍だから、負値である。) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 - 2^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = (\lambda + 1)(\lambda + 5)$ であり、固有値は -1, -5 である。共に負であるから負値である。あるいは

$$\det A_1 = A_1 = -3 < 0, \quad \det A_2 = \det A = (-3)^2 - (-2)^2 = 5 > 0$$

であるから、$(-1)^k \det A_k > 0$ $(\forall k)$ を満たしているので、A は負値である。

(7) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1) - 2^2 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$ であり、固有値は 0, 5 である。固有値に 0 があるので、正値でも負値でもない。また正の固有値はあるが、負の固有値はないので、不定符号でもない。ゆえに「正値でも、負値でも、不定符号のいずれでもない」。あるいは、

$$\det A = 4 \cdot 1 - 2^2 = 0$$

から固有値に 0 があることが分かり (固有値を λ_1, λ_2 とすると、$\lambda_1\lambda_2 = \det A = 0$ だから)、正値でも負値でもないことが分かる。2 次の正方行列の場合、もし不定符号であれば $\det A = \lambda_1\lambda_2 < 0$ であり、これは $\det A = 0$ に反するから、A は不定符号でないことも分かる。

(8) これは対角行列なので、固有値は対角成分で、0, 0. 正でない固有値があるので正値ではなく、負でない固有値があるので負値ではなく、正と負両方の固有値があるわけでないので不定符号ではない。

(9) 対角行列だから、固有値は対角成分の 1, 2, 3. みな正だから正値である。

(10) 対角行列だから、固有値は対角成分の 1, -2, 3. 正の固有値と負の固有値があるので不定符号である。

(11) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ とブロック分けしたとき、対角線上にあるブロック以外はすべて 0 である。

ゆえに対角線上にあるブロックの固有値を調べればよい。$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ は既に見たように正値である (問 (5))。右下のブロックの固有値は 1 でこれも正である。ゆえに正値である。

問題の行列を A とおくと、特性多項式は

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)((\lambda-3)^2-2^2) = (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5) \\ &= (\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda-1) = (\lambda-1)^2(\lambda-5) \end{aligned}$$

であり、固有値は 1, 1, 5 である。すべて正であるから正値である。

あるいは、

$$\begin{aligned} \det A_1 &= 3 > 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5, \\ \det A_3 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot 1 = 5 > 0 \end{aligned}$$

であるから、$\det A_k > 0$ $(k = 1, 2, 3)$ が成り立っていて、正値であることが分かる。

(12) これもブロック分けすると、固有値は、$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と、-3 を合わせたものだと分かる。A_2 は負値であるので (省略)、問題の行列の固有値はすべて負であることが分かり、負値である。

問題の行列を A とおくと、特性多項式は

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+3)((\lambda+3)^2-2^2) = (\lambda+3)(\lambda^2+6\lambda+5) \\ &= (\lambda+3)(\lambda+5)(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5) \end{aligned}$$

であり、固有値は -1, -3, -5 である。すべて負であるから負値である。

あるいは

$$\det A_1 = -3 < 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3)^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 > 0,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot (-3) = 5 \cdot (-3) = -15 < 0$$

であり、$(-1)^k \det A_k > 0 \ (\forall k)$ が成り立っているので、負値であることが分かる。

(13) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 4 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(2+1)}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4)\left((\lambda - 4)^2 - (-1)^2\right) - (\lambda - 4) = (\lambda - 4)\left(\lambda^2 - 8\lambda + 14\right)\end{aligned}$$

であり、固有値は $4, 4 \pm \sqrt{2}$ である。すべて正であるから正値である。

あるいは

$$\det A_1 = 4 > 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4^2 - 1^2 = 15 > 0,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 64 - 4 - 4 = 56 > 0$$

であり、$\det A_k > 0 \ (\forall k)$ が成り立っているので、正値であることが分かる。■

2　極値問題の例

典型例

例題 2.1 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ。

解　まず導関数を計算しよう:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - y \\ 3y^2 - x \end{pmatrix},$$

$$f \text{ の Hesse 行列 } H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

f の停留点を求める。

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y=0\\ y^2-x=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}y=x^2\\ x^4-x=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad x=y=0 \quad \text{or} \quad x=y=1.\end{aligned}$$

(1) 点 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ においては

$$H=\begin{pmatrix}0&-3\\-3&0\end{pmatrix}, \quad \therefore \det H=-9<0.$$

H は不定符号であるから、この点は極値点ではない。

(2) 点 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ においては

$$H=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}, \quad \therefore \det D_1=6>0, \quad \det D_2=\det H=6\cdot 6-(-3)(-3)=27>0.$$

H は正値であるから、この点は極小点である。値は

$$f(1,1)=1^3+1^3-3\cdot 1\cdot 1=-1.$$

以上をまとめると、$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ のとき極小値 -1. ■

図 1 は $[-1.5,1.5]\times[-1.5,1.5]$ で関数の様子を調べたものである。

定理が使えない例

$f'(a)=0$ で、$H(a)$ が正値でも負値でも不定符号でもない場合は、定理は何も言ってくれない。

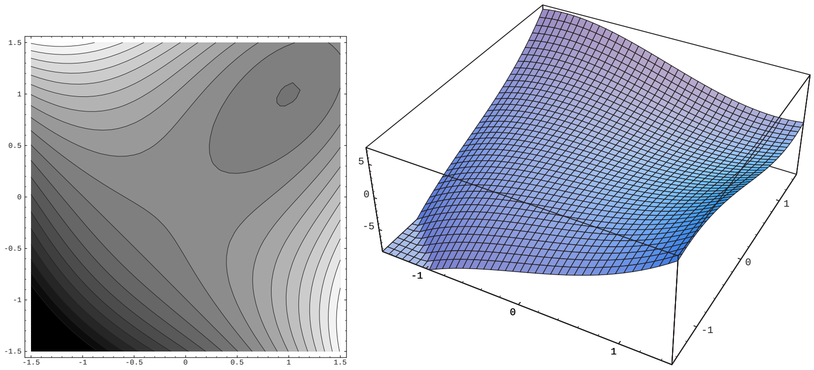
$f(x,y)=x^4+y^4$, $a=(0,0)$ のとき、$f'(a)=0$,

$$H(a)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

である。このとき $(x,y)\neq(0,0)$ ならば

$$f(x,y)=x^2+y^2>0=f(0,0)$$

であるから、f は a で狭義の極小である。



(a) 等高線　(b) 鳥瞰図(ちょうかんず)

図 1: $f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$

$f(x,y)=x^2-y^4$, $a=(0,0)$ のとき、$f'(a)=0$,

$$H(a)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

である。このとき $\forall\varepsilon\neq 0$ に対して、

$$f(\varepsilon,0)=\varepsilon^2>0=f(0,0),\quad f(0,\varepsilon)=-\varepsilon^4<0=f(0,0)$$

であるから、f は a で極値を取らない。
(準備中)

A　実対称行列の符号を判定する

(問 10 の添削を終えたあとに…)

- 不定符号の意味を勘違いしている人がいる。実対称行列が不定符号であるとは、正の固有値、負の固有値、両方とも存在するということである。もともと「正値」は「正定符号」 (positive definite) とも言って、一定の符号を持っているというニュアンスがあり、そうではないということで「不定符号」 (indefinite) という言葉が出来たのだと思う。しかし日本語で「不定符号」というのは若干イメージが湧きづらい。絶対採用されないだろうが、「両方符号」と言ってみたい気がする。

- こういう例を出しておくのだった。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

これは正の固有値、負の固有値どちらもあるので不定符号。

- もう一つ出しておきたい例は、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

この特性多項式は

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 2\lambda + 24$$

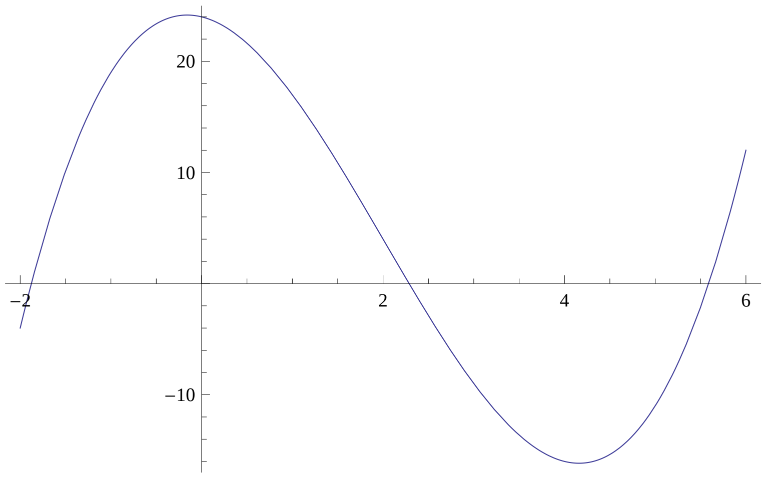
で固有値は (Cardano の方法によれば)

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{1}{3}\left(6 + \frac{7\ 6^{2/3}}{\sqrt[3]{-9 + i\sqrt{1977}}} + \sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977} + 9i\right)}\right), \\ 2 - \frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-9 + i\sqrt{1977}}}{6^{2/3}} + \frac{-7 + 7i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977} + 9i\right)}}, \\ 2 + \frac{i\left(\sqrt{3} + i\right)\sqrt[3]{-9 + i\sqrt{1977}}}{6^{2/3}} + \frac{-7 - 7i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977} + 9i\right)}}. \end{aligned}$$

分かりづらいけれど、これは (もちろん) いずれも実数で

$$\lambda \fallingdotseq 5.580664\cdots, 2.2874\cdots, -1.877074\cdots.$$

これは手計算で固有値を求めようとしても無理だろう。



というグラフを見れば、固有値の符号の判定はそれほど難しくないだろうが。

$$\det A_1 = 1 > 0, \quad \det A_2 = -2 < 0, \quad \det A_3 = -24 < 0.$$

であるから、正値でも負値でもなく ($+++$ でも $-+-$ でもないので)、一方 0 は固有値でないので (もし 0 が固有値ならば $\det A = 0$ のはず)、不定符号であることが分かる。

- 「どちらでもない」は 2 つの選択肢の両方に合致しないということ。正値、負値、不定符号と 3 つあるときは「どちらでもない」でなくて、「どれでもない」、「いずれでもない」。

- 次数が 2, 3 の実対称行列の符号の判定には色々な解き方がある。以下に一つのお勧めを示す (「行列式作戦」と呼ぶことにする)。2 次の行列の場合は、2 次方程式作戦で必ず解けるわけであるが、3 次の行列の場合は、固有多項式が 3 次式で簡単には解けないので (もっとも根の符号の決定は微積分を利用して求めることは出来るというツッコミはあるだろうが)、行列式作戦 (首座小行列式 $\det A_k$ の符号を調べる方法) が有力と思う。

  1. 対角行列ならば、対角成分が固有値であるから、その符号を調べる。
  2. 対角行列でなければ、すべての首座小行列 A_k の行列式を計算して、正値か負値か判定する。次の (a) と (b) が良く知られた基本的事項である。

     (a) A が正値 $\iff \forall k \in \{1,\dots,n\}\ \det A_k > 0$ (言い換えると $\det A_k$ がすべて正)

     (b) A が負値 $\iff \forall k \in \{1,\dots,n\}\ (-1)^k \det A_k > 0$ (言い換えると、$\det A_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の符号は順に $-$, $+$, $-$, $+$, $\dots$)

     (c) ここまでで正値であるかどうか、負値であるかどうかは完全に判定できている。正値でも、負値でもないことが分かった場合、残るは不定符号であるかどうか。

       (i) A が 2 次のときは、$\det A (= \det A_2)$ の符号で簡単に完全に判定できる。

       $$A \text{ が不定符号} \iff \det A < 0.$$

       実際、A の固有値を λ_1, λ_2 とするとき、$\lambda_1\lambda_1 = \det A < 0$ であるから、λ_1 と λ_2 は異符号である。まとめると、

       2 次実対称行列の符号の判定

       (1) $\det A_1 > 0$ かつ $\det A_2 > 0$ ならば A は正値である。

       (2) $\det A_1 < 0$ かつ $\det A_2 > 0$ ならば A は負値である。

       (3) $\det A (= \det A_2) < 0$ ならば、A は不定符号である。

       (4) $\det A (= \det A_2) = 0$ ならば、A は正値でも、負値でも、不定符号でもない。

       ($\det A_1 = 0$, $\det A_2 > 0$ ということは起り得ない。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ という形をしているので、$\det A = ac - b^2$ となり、$\det A > 0$ から $a = \det A_1 \neq 0$ が導かれる。)

       (ii) A が 3 次の場合。もし $\det A (= \det A_3) \neq 0$ ならば、0 は固有値でなく、ここまでの過程で正値でも負値でもないと分かっているので、A は不定符号である。$\det A (= \det A_3) = 0$ ならば、0 が固有値である。この場合、A の固有多項式 $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ は λ を因数に持つので、$p(\lambda) = \lambda q(\lambda)$ と因数分解できて、$q(\lambda)$ は 2 次式なので、すべての固有値が必ず計算出来る。

3 次実対称行列の符号の判定

(1) $\det A_1 > 0$ かつ $\det A_2 > 0$ かつ $\det A_3 > 0$ ならば A は正値である。

(2) $\det A_1 < 0$ かつ $\det A_2 > 0$ かつ $\det A_3 < 0$ ならば A は負値である。

(3) (1), (2) のどちらでもなく、$\det A (= \det A_3) \neq 0$ ならば、A は不定符号である。

(4) $\det A_3 = 0$ (上の (1), (2), (3) のいずれでもない) 場合、「固有値作戦」に切り替える。つまり、A の固有多項式 $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ を計算する。これは ($\det A = 0$ であるから) λ を因数に持つので、2 次方程式の解の公式を用いれば固有値が求まる。ゆえに符号の判定は計算可能である (公式を作ることが出来る、というか実際作ってみたけれど、覚える価値があるとは思えないので、ここには書かない)。

- (一般の場合の行列式作戦) 4 次以上の行列の場合も、$k = 1, 2, \ldots$ に対して $\det A_k$ を計算して、すべて正数になるか、負数から始まって負と正が交互に続くかの判定をすることで、正値か負値か完全に判定できる。そうならなかった場合、$\det A$ を計算する。$\det A \neq 0$ であれば、不定符号である。$\det A = 0$ の場合は少々面倒である。
- Gauss の消去法はどこに行った？という人がいるかもしれない。個人的には Gauss の消去法が一番便利だと思っている。まず正値であるかどうか、負値であるかどうかは完全に判定が可能である。そして正値でも負値でもない場合 (対角線が正数続き、負数続きのいずれでもない場合)、必要ならば行の交換をして、とにかく行列式の値を求めることが出来る。すると、上の「3 次実対称行列の符号の判定」の (3) までは出来るわけである。だから、「Gauss の消去法作戦」は「行列式作戦」と互角以上である。行列式の計算を考えると、真っ先に上がるのが Gauss の消去法で上三角行列に変換してから求める方法であるから、「Gauss の消去法作戦」の方が有利であろう。

B　3 次実対称行列の符号判定の公式 (蛇足)

行列式が 0 でない場合は出来ている。0 の場合を考える。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

のとき

$$\varphi(\lambda) := \det(\lambda I - A)$$

とおくと、

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - (a + d + f)\lambda^2 + (-b^2 - c^2 - e^2 + ad + af + df)\lambda - \det A.$$

$\det A = 0$ のとき、

$$\varphi(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 - (a+d+f)\lambda + (-b^2 - c^2 - e - 2 + ad + af + df)\right).$$

従って、A の固有値から 0 を一つ除いたものを λ_1, λ_2 とするとき、

$$\lambda_1\lambda_2 = -b^2 - c^2 - e - 2 + ad + af + df.$$

これが負ならば、A は不定符号。そうでなければ不定符号ではない。

C　少し真剣にアルゴリズムの追求

C.1　固有値計算作戦

固有多項式 $\varphi(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ を計算して、その根を求める。$n=2$ のときは 2 次方程式の解の公式で計算可能である。実際、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ のとき、

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - t\lambda + D, \quad t := a + b, \quad D := ad - bc$$

であるから、

$$\lambda = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4D}}{2}.$$

しかし $n \geq 3$ になると困難が生じる。$n = 3$ であっても、いわゆる不還元の場合には、解が虚数の 3 乗根を含む形で表されることになる (もちろん、微積分を使えば何とか処理できるが)。

C.2　首座小行列式作戦

$k = 1, 2, \cdots$ に対して、$\det A_k$ (A_k は A の k 次首座小行列) を計算して符号を調べる。

(i) すべて正である ($\forall k \in \{1, \cdots, n\}$ $\det A_k > 0$) ことは、A が正値であるための必要十分条件である。

(ii) 負から始まり、負と正が交互に現れる ($\forall k \in \{1, \cdots, n\}$ $(-1)^k \det A_k > 0$) ことは、A が負値であるための必要十分条件である。

(iii) 上の (i), (ii) のいずれでもない場合、$\det A$ を計算する。もし $\det A \neq 0$ であるならば、A は不定符号である。$\det A = 0$ のときは、一般には面倒だが、

  (a) $n = 2$ の場合は、正値、負値、不定符号のいずれでもないと結論できる ($\det A < 0 \iff A$ は不定符号)。

  (b) また $n = 3$ の場合は、固有多項式が容易に因数分解可能で、符号の判定は容易である。結論だけ書いておくと

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

の固有多項式は

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - (a+d+f)\lambda^2 + (-b^2 - c^2 - e - 2 + ad + af + df)\lambda - \det A$$

であるから、$\det A = 0$ を満たすとき、

$$\lambda_1\lambda_2 = -b^2 - c^2 - e - 2 + ad + af + df$$

が負ならば不定符号、そうでないならば正値でも負値でも不定符号でもない。

(c) $n \geq 4$ の場合は研究課題であろう。

C.3 Gauss の消去法作戦

A の対角線から下を掃き出す。A が正値であれば、対角線に非零要素は現れず、行交換なしに最後まで上三角化が進められて、対角線に正数が並ぶはずである。一方、A が負値であれば、対角線に非零要素は現れず、行交換なしに最後まで上三角化が進められて、対角線に負数が並ぶはずである。そのいずれでもない場合、必要ならば行交換を施して計算を進めて A の行列式を計算する (行交換を全部で r 回した場合、最終的には対角成分の積 $\times(-1)^r = \det A$ である)。$\det A \neq 0$ ならば、A は 0 を固有値に持たず、正値でも負値でもないので、A は実は不定符号であることが分かる。$\det A = 0$ の場合は少々難しいが、シフトしてみるなどして (つまり A の代りに、$A + \sigma I$ (σ は適当に選ぶ実数) を調べる)、「何とかなる」場合が多いであろう。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対する Gauss の消去法は、行交換なしに

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

となるので、いわゆる符号は $(1,2)$ (負の固有値が 1 個, 正の固有値は 2 個) で、不定符号である。

$p(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ の根は

$$\lambda = \frac{1}{3}\left(6 + \frac{7\ 6^{2/3}}{\sqrt[3]{-9 + i\sqrt{1977}}} + \sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977} + 9i\right)}\right),$$

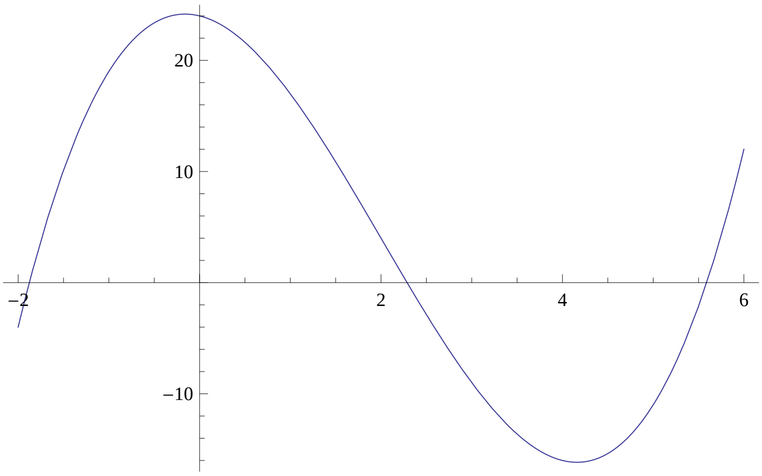
$$2 - \frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)\ \sqrt[3]{-9 + i\sqrt{1977}}}{6^{2/3}} + \frac{-7 + 7i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977} + 9i\right)}},$$

$$2 + \frac{i\left(\sqrt{3} + i\right)\ \sqrt[3]{-9 + i\sqrt{1977}}}{6^{2/3}} + \frac{-7 - 7i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977} + 9i\right)}}.$$

分かりづらいけれど、これは (もちろん) いずれも実数で

$$\lambda \fallingdotseq 5.580664\cdots, 2.2874\cdots, -1.877074\cdots.$$

p のグラフは次のようになる。



C.4 処世術

Gauss の消去法で行列の符号が計算できることは、知らない人も結構いると思われる。ペーパーテストで Gauss の消去法で符号を調べるのは少し危険があるかもしれない。