多変数の微分積分学1 演習問題 (Part 1)

桂田 祐史

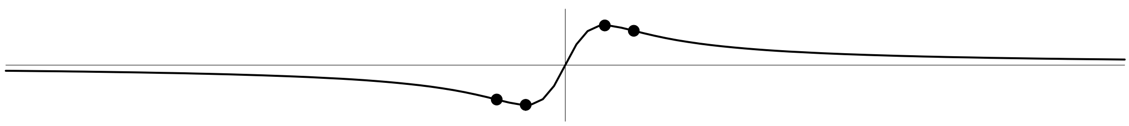
2011年6月6日

位相がらみの細かい話はカットする (その部分を Part 1 と呼ぶことにするが配布しない)。Taylor の定理〜最後までを Part 3 と呼ぶ (これは準備でき次第配布する)。

高校数学から

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ とおくとき、$y = f(x)$ のグラフの概形を描きなさい。(増減表を作成すること。また第2次導関数 (2階の導関数) を求め、曲線の凹凸も調べること。$\lim_{x\to\infty} f(x)$ と $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ も求めること。)

略解 $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で極小、$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で極大。$x = 0, \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ が変曲点で、グラフは次のようになる。



論理

2. 連立方程式

$$\begin{cases} x(x^2+4y+y^2) = 0 \\ (y+2)(y+x^2) = 0 \end{cases}$$

を解け。

解答 (結果のみ) $(x,y) = (0,0), (0,-2), (\pm 2, -2), (\pm\sqrt{3}, -3).$

3. 次の論理式の否定を作れ。

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq N)\ \|x_n - a\| \leq \varepsilon.$

(2) $(\forall x \in A)\ (\exists \varepsilon > 0)$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A.$

(3) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in B(a;\delta))\ \|f(x) - f(a)\| \le \varepsilon.$

(4) $(\exists R \in \mathbf{R})\ (\forall x \in A)\ \|x\| \le R.$

解答. (省略)

R^n の内積とノルム

4. (Schwarz の不等式の別証明) $\vec{x}$ と $\vec{y}$ は $\mathbf{R}^n$ の要素で、$\vec{y} \ne \vec{0}$ とする。

(1) 原点と $\vec{y}$ を通る直線 $L := \{t\vec{y}; t \in \mathbf{R}\}$ 上の点 $\vec{w}$ で、$(\vec{x} - \vec{w}) \perp \vec{y}$ を満たすものを求めよ ($\vec{w}$ は、$\vec{x}$ の L への正射影、あるいは、$\vec{x}$ から L に下ろした垂線の足、と呼ばれる)。

(2) $\|\vec{w}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{x}\|^2$ が成り立つことを確めよ (直角三角形なので、要するにピタゴラスの定理であるが、ちゃんと計算で確めよ)。

(3) $|(\vec{x}, \vec{y})| \le \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ が成り立つことを示せ。等号はいつ成立するか。

略解 (1) $\dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{(\vec{y}, \vec{y})}\vec{y}$ (2) 計算して確めるだけ (3) $\|\vec{x} - \vec{w}\|^2 \ge 0$ に注意すると $\|\vec{w}\| \le \|\vec{x}\|$. これを整理する。 ■

5. (中線定理[1]) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ を示せ。

略解 左辺を内積で表して展開すると右辺が得られる。

6. 平面上の三角形 ABC に対し、$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ を最小にする点 P は、三角形 ABC の重心であることを示せ — $f(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|^2$ は $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})/3$ で最小となる。

略解 内積の性質を用いて展開してから平方完成すると、$f(x) = 3\,\|\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})/3\| - 2 +$ 定数 となることから。 ■

7. 任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して、$\|\vec{x} - \vec{y}\| \ge \Big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\Big|$ を示せ。

解答 (講義ノートを見よ。)

[1]「三角形 OAB において、辺 AB の中点を M とすると、$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = 2(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{AM}^2)$.」というのがパップスの中線定理である。英語では “parallelogram theorem” で、直訳すると「平行四辺形定理」。

8.　(1) $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\|\vec{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

とおくとき、$\|\cdot\|_1$ は、$\mathbf{R}^n$ 上のノルムとなることを示せ。
(2) $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\|\vec{x}\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

とおくとき、$\|\cdot\|_\infty$ は、$\mathbf{R}^n$ 上のノルムとなることを示せ。

ヒント　地道にチェックするだけ。使うのは三角不等式 $|a+b| \le |a| + |b|$ と、$\max_i (a_i + b_i) \le \max_i a_i + \max_i b_i$ ということくらい。■

9.　(やや難) $1 < p < \infty$ とするとき、$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

とおくとき、$\|\cdot\|_p$ は、$\mathbf{R}^n$ 上のノルムとなることを示せ。

集合の包含関係、等式の証明

10.　以下の (1)〜(4) を示せ。

(1) $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x > 0$ かつ $y > 0\}$, $(a, b) \in A$ とするとき、$\varepsilon := \min\{a, b\}$ とおくと、$B((a, b); \varepsilon) \subset A$ が成り立つ。

(2) $x \in (a, b)$ に対して、$\varepsilon := \min\{a - x, b - x\}$ とおくとき、$\varepsilon > 0$ かつ $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$ である。

(3) $x \in B(a; r)$ に対して、$\varepsilon := r - \|a - x\|$ とおくとき、$\varepsilon > 0$ かつ $B(x; \varepsilon) \subset B(a; r)$ である。

(4) $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2\}$, $(p, q) \in A$ とするとき、$\varepsilon := \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - r$ とおくと、$B((p, q); \varepsilon) \subset A$ が成り立つ。

11.　$B(a; r)$ を $\mathbf{R}^m$ の球とする時、以下の等式を証明せよ。

(1) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B(0; 1/n) = \{0\}$　　(2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B(0; n) = \mathbf{R}^m$

ヒント　集合の等式 $A = B$ を証明するには、$A \subset B$ と $B \subset A$ を証明すれば良い。$A \subset B$ とは、$\forall a \in A$ に対して $b \in B$ が成り立つこと。■

R の有界集合

12. 以下の $\mathbf{R}$ の部分集合は、(a) 上に有界だが下に有界ではない, (b) 下に有界だが上に有界ではない, (c) 有界である, (d) 上にも下にも有界でない, のいずれに該当するか、判定せよ。
(1) $\left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$ (2) $\{n^2; n \in \mathbf{N}\}$ (3) $\{(-1)^n n; n \in \mathbf{N}\}$ (4) $\{-n[1+(-1)^n]; n \in \mathbf{N}\}$.

解答 (結果のみ) (1) (c) (2) (b) (3) (d) (4) (a) ■

13. 次にあげる $\mathbf{R}$ の部分集合の上限、下限を求めよ。
(1) $(0,1]$ (2) $\mathbf{N}$ (3) $\mathbf{R}$ (4) $\left\{\dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$ (5) $\{n^2; n \in \mathbf{N}\}$ (6) $\left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$
(7) $\{x \in \mathbf{Q}; x^2 < 2\}$ (8) $\left\{\sin\dfrac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\right\}$ (9) $(0,1) \cup (2,3)$ (10) $\{\tan^{-1} x; x \in \mathbf{R}\}$ (ただし $\tan^{-1}$ は主値を取るものとする。)

結果のみ (理由は省略) (1) 1, 0 (2) 存在しない, 1 (3) 存在しない, 存在しない (4) 1, 0 (5) 存在しない, 1 (6) $\dfrac{1}{2}, -1$ (7) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (8) $\sin 1, 0$ (9) 3, 0 (10) $\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}$

14. (1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で有界であるものの例をあげ、定義に従って、有界であることを証明せよ。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で有界でないものの例をあげ、定義に従って、有界でないことを証明せよ。

ヒント 講義ノートを見よ。■

R^n の位相

開集合、閉集合の定義は自信を持って即答できるようにしておくこと。A が開集合であることを開集合の定義に基づき証明するには、$B(x;\varepsilon) \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ の存在を具体的に示すことになる。一般に、x と A の補集合との距離を d とすると、$B(x;d) \subset A$ が証明できるので、後は $d > 0$ かそうでないかが問題となる。開集合でないことを示すには、$d = 0$ となるような $x \in A$ が存在することを確める。

なお、「$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ に対して、$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\}$ という形の集合はすべて $\mathbf{R}^n$ の開集合」という定理は有用である。

15. (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 (ただし空集合でも、全空間でもないとする) で、開集合であるものの例をあげ、定義に従って、開集合でないことを証明せよ。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で開集合でないものの例をあげ、定義に従って、開集合でないことを証明せよ。

ヒント 講義ノートを見よ。■

16. (1) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 (ただし空集合でも、全空間でもないとする) で、閉集合であるものの例をあげ、定義に従って、閉集合でないことを証明せよ。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で閉集合でないものの例をあげ、定義に従って、閉集合でないことを証明せよ。

ヒント 講義ノートを見よ。■

17. 次の各集合について、$\mathbf{R}$ の開集合であるかどうか答えよ (理由も述べよ)。
(1) 空集合 $\emptyset$ (2) $\mathbf{R}$ (3) $\{0\}$ (4) $(0,1)$ (5) $[0,1]$ (6) $(0,1]$ (7) $[0,1)$ (8) $(0,\infty)$ (9) $[0,\infty)$ (10) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

記号の説明: $(a,b)=\{x\in\mathbf{R}; a<x<b\}$, $[a,b]=\{x\in\mathbf{R}; a\le x\le b\}$, $(a,b]=\{x\in\mathbf{R}; a<x\le b\}$, $[a,b)=\{x\in\mathbf{R}; a\le x<b\}$. $A\setminus B=\{x\in A; x\notin B\}$. 特に $\mathbf{R}\setminus\{0\}=\{x\in\mathbf{R}; x\neq 0\}$.

結果のみ (理由は省略) (1) Yes (2) Yes (3) No (4) Yes (5) No (6) No (7) No (8) Yes (9) No (10) Yes

18. 前問の各集合について、$\mathbf{R}$ の閉集合であるかどうか答えよ (理由も述べよ)。

結果のみ (理由は省略) (1) Yes (2) Yes (3) Yes (4) No (5) Yes (6) No (7) No (8) No (9) Yes (10) No

19. $\mathbf{R}^2$ における次の各集合について、(図示できる場合はそうして) 開集合であるかどうか答えよ (理由も述べよ)。
(1) $\emptyset$ (2) $\mathbf{R}^2$ (3) $\{(0,0)\}$ (4) 有限個の点集合 $\{\vec{x}_i; 1\le i\le n\}$ (5) $(0,1)\times(2,3)$
(6) $[0,1]\times(2,3)$ (7) $[0,1]\times[2,3]$ (8) $\{(x,y); 1<x^2+y^2<4\}$ (9) $(0,\infty)\times(0,\infty)$
(10) $\{(x,y); x^3\le y\le x^2\}$ (11) $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (12) $\{(1/n,1/n); n\in\mathbf{N}\}$

結果のみ (理由は省略) (1) Yes (2) Yes (3) No (4) No (5) Yes (6) No (7) No (8) Yes (9) Yes (10) No (11) Yes (12) No

20. 前問の各集合について、閉集合であるかどうか答えよ (理由も述べよ)。

結果のみ (理由は省略) (1) Yes (2) Yes (3) Yes (4) Yes (5) No (6) No (7) Yes (8) No (9) No (10) Yes (11) No (12) No ■

21. 次の各集合について、内部、境界、外部、閉包を求めよ。
(1) 空集合 $\emptyset$ (2) $\mathbf{R}$ (3) $\{0\}$ (4) $(0,1)$ (5) $[0,1]$ (6) $(0,1]$ (7) $[0,1)$ (8) $(0,\infty)$ (9) $[0,\infty)$
(10) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

結果のみ　(根拠は省略)

(1) $A^i = \emptyset$, $A^b = \emptyset$, $A^e = \mathbf{R}$, $\overline{A} = \emptyset$

(2) $A^i = \mathbf{R}$, $A^b = \emptyset$, $A^e = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbf{R}$

(3) $A^i = \emptyset$, $A^b = \{0\}$, $A^e = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\overline{A} = \{0\}$

(4) $A^i = (0,1)$, $A^b = \{0,1\}$, $A^e = \mathbf{R} \setminus [0,1]$, $\overline{A} = [0,1]$

(5) $A^i = (0,1)$, $A^b = \{0,1\}$, $A^e = \mathbf{R} \setminus [0,1]$, $\overline{A} = [0,1]$

(6) $A^i = (0,1)$, $A^b = \{0,1\}$, $A^e = \mathbf{R} \setminus [0,1]$, $\overline{A} = [0,1]$

(7) $A^i = (0,1)$, $A^b = \{0,1\}$, $A^e = \mathbf{R} \setminus [0,1]$, $\overline{A} = [0,1]$

(8) $A^i = (0,\infty)$, $A^b = \{0\}$, $A^e = (-\infty,0)$, $\overline{A} = [0,\infty)$

(9) $A^i = (0,\infty)$, $A^b = \{0\}$, $A^e = (-\infty,0)$, $\overline{A} = [0,\infty)$

(10) $A^i = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $A^b = \{0\}$, $A^e = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbf{R}$

22.　次の各集合について、内部、境界、外部、閉包を求めよ。
(1) $\emptyset$　(2) $\mathbf{R}^2$　(3) $\{(0,0)\}$　(4) 有限個の点集合 $\{\vec{x}_i; 1 \leq i \leq n\}$　(5) $(0,1) \times (2,3)$
(6) $[0,1] \times (2,3)$　(7) $[0,1] \times [2,3]$　(8) $\{(x,y); 1 < x^2 + y^2 < 4\}$　(9) $(0,\infty) \times (0,\infty)$
(10) $\{(x,y); x^3 \leq y \leq x^2\}$　(11) $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$　(12) $\{(1/n, 1/n); n \in \mathbf{N}\}$

結果のみ

(1) $A^i = \emptyset$, $A^b = \emptyset$, $A^e = \mathbf{R}^2$, $\overline{A} = \emptyset$

(2) $A^i = \mathbf{R}^2$, $A^b = \emptyset$, $A^e = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbf{R}^2$

(3) $A^i = \emptyset$, $A^b = \{(0,0)\}$, $A^e = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}t$, $\overline{A} = \{(0,0)\}$

(4) $A^i = \emptyset$, $A^b = \{\vec{x}_i; 1 \leq i \leq n\}$, $A^e = \mathbf{R}^2 \setminus \{\vec{x}_i; 1 \leq i \leq n\}t$, $\overline{A} = \{\vec{x}_i; 1 \leq i \leq n\}$

(5) $A^i = (0,1) \times (2,3)$, $A^b = \{(0,y); 2 \leq y \leq 3\} \cup \{(1,y); 2 \leq y \leq 3\} \cup \{(x,2); 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,3); 0 \leq x \leq 1\}$, $A^e = \mathbf{R}^2 \setminus [0,1] \times [2,3]$, $\overline{A} = [0,1] \times [2,3]$

(6) (5) と同じ

(7) (5) と同じ

(8) (5) と同じ

(9) $A^i = \{(x,y); 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, $A^b = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1$ または $x^2 + y^2 = 4\}$, $A^e = \{(x,y); x^2 + y^2 < 1$ または $x^2 + y^2 > 4\}$, $\overline{A} = \{(x,y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

(10) $A^i = (0,\infty) \times (0,\infty)$, $A^b = \{(x,0); x \geq 0\} \cup \{(0,y); y \geq 0\}$, $A^e = \{(x,y); x < 0$ または $y < 0\}$, $\overline{A} = [0,\infty) \times [0,\infty)$

(11) $A^i = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $A^b = \{(0,0)\}$, $A^e = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbf{R}^2$

(12) $A^i = \emptyset$, $A^b = A \cup \{(0,0)\}$, $A^e = \mathbf{R}^2 \setminus (A \cup \{(0,0)\})$, $\overline{A} = A \cup \{(0,0)\}$

23.　例にならって、領域 D を 2 通りに表示せよ。
例: x 軸および半円周 $x^2+y^2=1$, $y>0$ によって囲まれる領域

$$D = \left\{(x,y); -1<x<1,\ 0<y<\sqrt{1-x^2}\right\} = \left\{(x,y); 0<y<1,\ -\sqrt{1-y^2}<x<\sqrt{1-y^2}\right\}.$$

(1) 直線 $y=x$, $y=0$, $x=1$ によって囲まれる領域

(2) 直線 $y=2x$, $y=2$, $x=0$ によって囲まれる領域

(3) 直線 $y=2-x$, $y=0$ および曲線 $y=x^2$ によって囲まれる領域

(4) 直線 $y=2$, $x=0$ および曲線 $y=\sqrt{x}$ によって囲まれる領域

(5) 直線 $y=x+1$, $y=-\dfrac{1}{2}x+1$, $y=0$ によって囲まれる領域

(6) $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ を頂点とする四角形の内部

24.　$\mathbf{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と $a, b \in \mathbf{R}^N$ に対して、次を示せ (内積の連続性)。

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a,b).$$

25.　次の A_1, A_2 の各々につき、簡単に図示し、それが有界集合かどうか、開集合かどうか、閉集合かどうか、調べよ。$A_1 = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2/4 - y^2/9 < 1\}$, $A_2 = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^4+y^4=1\}$, $A_3 = \{(x,y); x^2 + \dfrac{y^2}{4} < 1\}$, $A_4 = \{(x,y); x^2 - y^2 = 1\}$

結果のみ (理由省略)　A_1: No, Yes, No　A_2: Yes, No, Yes　A_3: Yes, Yes, No　A_4: No, No, Yes

26.　$\mathbf{R}$ の任意の空でない有界閉集合は最大値と最小値を持つことを示せ。

ヒント　実はとても簡単。■

次の内容 (命題) は、授業で利用することがある (年度による)。

27.　$A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ とするとき、次の (1), (2) を示せ。

(1) A の上限が存在しないならば ($\sup A = \infty$ ならば)、数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ で、(i) $\forall n \in \mathbf{N}$ $x_n \in A$, (ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ を満たすものが存在する。

(2) A の上限 U が存在するならば ($\sup A = U \in \mathbf{R}$ ならば)、数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ で、(i) $\forall n \in \mathbf{N}$ $x_n \in A$, (ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = U$ を満たすものが存在する。

2 つを次のようにまとめることが出来る。

「$A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ ならば、$\exists \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ s.t. (i) $\forall n \in \mathbf{N}\ x_n \in A$, (ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup A$」

少し手助け　仮定を論理式で書いてみるのが第一歩。後は自力でゴールまでたどり着こう。

- A の上限が存在しない $\Leftrightarrow$ A は上に有界でない $\Leftrightarrow$ $\forall U \in \mathbf{R}\ \exists x \in A \quad x > U$.
- U が A の上限 $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l} \text{(i) } \forall x \in A \quad x \leq U \\ \text{(ii) } \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A \quad U - \varepsilon < x \end{array}$