多変数の微分積分学1 第1回

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2013年4月15日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

本質的には、講義ノート [?] に全部説明してある。そちらは論理的に順番に書いてあるが、景色が分かるまで時間がかかるので、授業では、ここ二三年、そのノートとは違う順番 (フライングあり) で説明している。

1 はじめに

「多変数の微分積分学1」では、多変数ベクトル値関数の微分法を学ぶ (積分法は後期の「多変数の微分積分学2」で学ぶ)。

1年次に次のようなことを学んだ。

- 基礎数学1,2 は、$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $f(x) = Ax$ (A は $m \times n$ 型行列) という関数についての数学であった。
  扱っている変数、関数の値ともにベクトルという意味では一般的だが、f は線形 (もしも $m = n = 1$ であれば f は中学校で学ぶ「正比例」の関数 $f(x) = ax$) で、そういう意味では簡単な場合を扱っている。
- 基礎数学3,4 は、$f\colon I \to \mathbf{R}$ (ただし I は $\mathbf{R}$ の区間) という関数 (1変数実数値関数) についての微積分であった。
  関数は「曲がっていても良く」て、そういう意味では一般的だが、変数も関数の値も実数、という意味で簡単な場合を扱っている。

これらを背景に，多変数の微分積分学1,2 では、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ (ただし Ω は $\mathbf{R}^n$ の部分集合) という関数 (n 変数 m 次元ベクトル値関数) の微分積分を学ぶわけである。

1変数であればベクトル値になっても実数値の関数と違いはほとんどない。難しくなる原因は、関数が多変数になることである、と言える (多変数関数では、これまでになかったようなことが起こる)。そのため、講義名も「<u>多変数の</u> 微分積分学1」となっている。

2 多変数関数とは

例 2.1 ある瞬間の部屋の中の空気の温度を考える。場所によって異なるので、場所の関数である。適当な直交座標系を用意すると、つまり部屋の中の任意の点は、三つの実数の組 (x_1, x_2, x_3) で表される。その点での温度を

$$u(x_1, x_2, x_3)$$

とすると、u は 3 つの変数 x_1, x_2, x_3 についての関数である。ベクトル変数 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ についての関数ともみなせる。

$$u(\vec{x})=u(x_1,x_2,x_3).$$

部屋は $\mathbf{R}^3$ のある部分集合 Ω であると考えられ、u は $u\colon\Omega\to\mathbf{R}$ という写像となる。

(もし時間による変化を考えると、時刻 t の関数でもあることになり、4 変数関数 $u(x_1,x_2,x_3,t)$ になる。)

今度は、ある瞬間の部屋の中の風の速度を考える。位置 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ における風の速度を

$$\vec{v}(\vec{x})=\begin{pmatrix}v_1(\vec{x})\\v_2(\vec{x})\\v_3(\vec{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1(x_1,x_2,x_3)\\v_2(x_1,x_2,x_3)\\v_3(x_1,x_2,x_3)\end{pmatrix}$$

とすると、$\vec{v}$ は $\vec{v}\colon\Omega\to\mathbf{R}^3$ という写像となる。■

集合、写像の言葉を使って書くと、n 変数 m 次元ベクトル値関数とは、$\mathbf{R}^n$ のある部分集合 Ω 上定義され、 $\mathbf{R}^m$ に値を取る写像

$$\vec{f}\colon\Omega\longrightarrow\mathbf{R}^m$$

のことである。

$$\vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix}f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\\f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\\\vdots\\f_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{pmatrix}$$

の形をしている。

上の u は 3 変数 1 次元ベクトル値 (実数値) 関数であり、$\vec{v}$ は 3 変数 3 次元ベクトル値関数である。

3　1変数ならばベクトル値でも簡単

1 変数ならば、ベクトル値であっても、極限、連続性、微分可能性等は簡単である。

I を $\mathbf{R}$ の区間、$\vec{f}\colon I\to\mathbf{R}^m$ とする。各 $x\in I$ に対して、$\vec{f}(x)\in\mathbf{R}^m$ であるから、

$$\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\\vdots\\f_m(x)\end{pmatrix}:=\vec{f}(x)$$

とおくと、各 $i\in\{1,2,\dots,m\}$ に対して、$f_i\colon I\to\mathbf{R}$ である。

次のようにまとめておく (納得しやすいであろう)。

m 次元ベクトル値関数とは、実数値関数 m 個の組である。

微積分をするには、極限や連続性が問題となるが、1 変数ベクトル値関数 $\vec{f}$ については、極限や連続性、微分は「成分 f_i ごと」に考えれば良い。

例えば、極限については、

$$\lim_{x\to a}\vec{f}(x)=\vec{A} \quad\Leftrightarrow\quad \forall i\in\{1,2,\cdots,m\}\quad \lim_{x\to a}\vec{f_i}(x)=\vec{A_i}\quad (\text{ただし}\ \begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}:=\vec{A}).$$

言い換えると、

$$\lim_{x\to a}\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\\vdots\\f_m(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim_{x\to a}f_1(x)\\\lim_{x\to a}f_2(x)\\\vdots\\\lim_{x\to a}f_m(x)\end{pmatrix}$$

ということであり、「ベクトル値関数の極限は実数値関数の極限に帰着される」。

例 3.1 $\vec{f}(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\sin x}{x}\\x^3-3x+2\end{pmatrix}$ とするとき、

$$\lim_{x\to 0}\vec{f}(x)=\begin{pmatrix}\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\\\lim_{x\to 0}\left(x^2-3x+2\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.\blacksquare$$

微分に関しても同様に、

$$\vec{f}'(x)=\begin{pmatrix}f_1'(x)\\f_2'(x)\\\vdots\\f_m'(x)\end{pmatrix}$$

が成り立つ。高階の導関数についても同様である。

関数が実数値からベクトル値になっても、(成分ごとにやればよく) あまり変わらない

例 3.2 (質点の運動、特に等速円運動) 質点が時間の経過とともにその位置を変えるとき、時刻 $t\in I$ (I は $\mathbf{R}$ の区間) における位置ベクトルを $\vec{f}(t)$ で表すと，一つのベクトル値関数 $\vec{f}\colon I\to\mathbf{R}^m$ が得られる。

ここでは独立変数を t, 従属変数を $\vec{x}$ と書くことにしよう:

$$\vec{x}=\vec{f}(t).$$

このとき

$$\vec{v}(t):=\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}'(t)$$

を時刻 t における質点の**速度** (velocity) と呼ぶ。また速度のノルム (大きさ) $\|v(t)\|$ のことを**速さ** (speed) と呼ぶ。

速度の導関数

$$\vec{\alpha}(t):=\vec{v}'(t)=\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=\vec{f}''(t)$$

は質点の**加速度** (acceleration) と呼ばれる。

$m=2$, $r>0$, $\omega\in\mathbf{R}$ とするとき、$\vec{f}(t):=\begin{pmatrix} r\cos\omega t\\ r\sin\omega t\end{pmatrix}$ とおくと、原点を中心とする半径 r の円周上を一定の角速度 ω で移動する質点の運動とみなせる。

$$\vec{v}(t)=\vec{f}'(t)=\begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t\\ r\omega\cos\omega t\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\|\vec{v}(t)\|=r|\omega|,\quad \vec{v}(t)\perp\vec{f}(t).$$

(後者は $\vec{v}(t)\cdot\vec{f}(t)=0$ や、$\vec{v}(t)=\omega\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}\vec{f}(t)$ から分かる。) また

$$\vec{\alpha}(t)=\vec{f}''(t)=\begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\omega t\\ -r\omega^2\sin\omega t\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\|\vec{\alpha}(t)\|=r\omega^2,\quad \vec{\alpha}(t)=-\omega^2\vec{f}(t),\quad \vec{\alpha}(t)\perp\vec{v}(t).$$

(「加速度は中心を向く」、「速度と加速度は直交する」)。 ■

4　$\mathbf{R}^n$ の標準的な内積とノルム

$\mathbf{R}^n$ については、既に学んだはずであるが、記号の確認、復習を兼ねて説明しておく (授業では駆け足で通り過ぎるはずである)。後々、不等式が重要になる (極限の議論をする際に使うことが多い)。

定義 4.1 (内積空間としての $\mathbf{R}^n$ の定義) $n\in\mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n &:= \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\mathbf{R} \qquad (n \text{ 個の } \mathbf{R} \text{ の直積})\\ &= \left\{\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}; x_i\in\mathbf{R}\quad(i=1,2,\dots,n)\right\}\end{aligned}$$

とおく。ただし n 次元**内積空間** (内積を持った n 次元線形空間) としての構造を入れておく。言い替えると

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n,\quad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n,\quad \lambda\in\mathbf{R}$$

に対して、**和** $\vec{x}+\vec{y}$, **スカラー倍** $\lambda\vec{x}$, **内積** (**inner product**) $(\vec{x},\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}$ を以下のように定義する。

$$\vec{x}+\vec{y}:=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix},\quad \lambda\vec{x}:=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix},\quad (\vec{x},\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}:=\sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

注意 4.2 (ベクトルの縦と横) この講義では、ベクトルが縦であるか横であるか、問題になるときは、断りのない限り縦ベクトルとする。行列 A とベクトル x のかけ算を Ax と書きたいからである。■

注意 4.3 (内積の呼び方、記号) 内積のことを**スカラー積** (scalar product), **ドット積** (dot product) とも呼ぶ。また、$(\vec{x},\vec{y})$ という記号は、順序対 (要するに $\vec{x}$, $\vec{y}$ の組) と紛らわしいという理由で、内積を $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$ と表している本も多い。

$(\vec{x},\vec{y})=\vec{y}^T\vec{x}$ ($\vec{y}^T$ は $\vec{y}$ を転置して出来る 1 行 n 列の行列) と書けることを知っておくと便利なことがある。■

$\mathbf{R}^n$ のことを n 次元数ベクトル空間、あるいは n 次元 Euclid(ユークリッド) 空間と呼ぶ。$\mathbf{R}^n$ の要素のことを (その時の気分で) 点と呼んだり、ベクトルと呼んだりする。(ここまで、$\mathbf{R}^n$ の要素には矢印 $\vec{}$ をつけたが、面倒なので、以下は混同のおそれがない限り、省略することもある。)

以下 $\mathbf{R}^n$ と書いたとき、n が自然数を表すことは一々断らないことが多い。

次の命題が成り立つことは明らかであろう。

命題 4.4 (内積の公理) $\mathbf{R}^n$ の内積 $(\cdot,\cdot)$ は次の性質を満たす。

(1) $\forall\vec{x}\in\mathbf{R}^n$ に対して $(\vec{x},\vec{x})\ge 0$. また $\forall\vec{x}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$(\vec{x},\vec{x})=0\iff\vec{x}=0.$$

(2) $\forall\vec{x}\in\mathbf{R}^n$, $\forall\vec{y}\in\mathbf{R}^n$, $\forall\vec{z}\in\mathbf{R}^n$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, $\forall\mu\in\mathbf{R}$ に対して

$$(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{z})=\lambda(\vec{x},\vec{z})+\mu(\vec{y},\vec{z}).$$

(3) $\forall\vec{x}\in\mathbf{R}^n$, $\forall\vec{y}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$(\vec{x},\vec{y})=(\vec{y},\vec{x}).$$

証明 簡単なので省略する。■

余談 4.1 (証明の手引き) 確かに簡単ではあるけれど、少しお手本を。例えば、(2) を簡単にした

$$(\bigstar)\qquad \forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbf{R}^n\quad (\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z})$$

をどのように証明するか、説明を補足しておこう。

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \vec{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}$$

とおくと、

のように自分で書き出せることが、何でもないようでいて大事である。後は ($\bigstar$) の式の部分を x_j, y_j, z_j で表せば良い。

$$\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

であるから

$$(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=\sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)z_j=\sum_{j=1}^{n}x_jz_j+\sum_{j=1}^{n}y_jz_j=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z})\,.$$

この真似をして下さい。■

定理 4.5 (Cauchy-Schwarz(シュワルツ) の不等式) $\mathbf{R}^n$ の内積 $(\cdot,\cdot)$ は次の性質を満たす。$\forall\vec{x}\in\mathbf{R}^n$, $\forall\vec{y}\in\mathbf{R}^n$ に対して

(1)
$$(\vec{x},\vec{y})^2\le(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}).$$

この不等式において等号が成り立つための必要十分条件は、$\vec{x}$ と $\vec{y}$ が 1 次従属である (片方がもう一方のスカラー倍である) ことである。

(この後に書いてあるように $|(\vec{x},\vec{y})|\le\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ や、$-\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\le(\vec{x},\vec{y})\le\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ と書くことも出来る。そちらの形の方が分かりやすいかもしれない。

以下では “Cauchy” を略して単に「Schwarz の不等式」と呼ぶことにする。“Cauchy” を略してはいけないとおっしゃる先生もいるので、最初だけ Cauchy の顔を立てた。)

証明

(i) $\vec{x},\vec{y}$ が 1 次独立な場合。
$\forall t\in\mathbf{R}$ に対して $t\vec{x}+\vec{y}\ne 0$ であるから、

$$(t\vec{x}+y,t\vec{x}+y)>0.$$

ゆえに

$$(\vec{x},\vec{x})t^2+2(\vec{x},\vec{y})t+(\vec{y},\vec{y})>0.$$

t についての 2 次式の符号が変わらないことから

$$\frac{\text{判別式}}{4}=(\vec{x},\vec{y})^2-(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})<0.$$

移項して

$$(\vec{x},\vec{y})^2<(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}).$$

(ii) $\vec{x},\vec{y}$ が 1 次属な場合。
次のいずれかが成り立つ。

(a) $\vec{x}=t\vec{y}$ となる $t\in\mathbf{R}$ が存在する。

(b) $\vec{y}=t\vec{x}$ となる $t\in\mathbf{R}$ が存在する。

(a) の場合、$(\vec{x},\vec{y})^2 = [t(\vec{y},\vec{y})]^2 = t^2(\vec{y},\vec{y})^2$, $(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) = t^2(\vec{y},\vec{y})^2$ だから $(\vec{x},\vec{y})^2 = (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$.

(b) の場合、$(\vec{x},\vec{y})^2 = [t(\vec{x},\vec{x})]^2 = t^2(\vec{x},\vec{x})^2$, $(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) = t^2(\vec{x},\vec{x})^2$ だから $(\vec{x},\vec{y})^2 = (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$.

(a), (b) どちらの場合も

$$(\vec{x},\vec{y})^2 = (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}).$$

(i), (ii) をまとめると、一般に不等式 (1) が成り立ち、等号は $\vec{x}$, $\vec{y}$ が 1 次従属なとき、そのときに限り成立する。 ■

定義 4.6 ($\mathbf{R}^n$ のノルム) $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して、$\vec{x}$ の**ノルム** (**norm**, 長さ、大きさ) $\|\vec{x}\|$ を

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$$

で定める。すなわち $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とするとき

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

($\vec{x}$ のノルムを $|\vec{x}|$ と表す流儀もある。)

この記号を用いると、Schwarz の不等式 (4.5) は

$$|(\vec{x},\vec{y})| \le \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \tag{2}$$

とも表される。

任意の実数 a, b について、

$$|a| \le b \quad \Leftrightarrow \quad -b \le a \le b$$

であることから、Schwarz の不等式は

$$-\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \le (\vec{x},\vec{y}) \le \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

と書くことも出来る。右の不等式で等号が成り立つためには、$\vec{x}$ と $\vec{y}$ が同じ方向&同じ向きであること ($t \ge 0$ である)、左の不等式で等号が成り立つためには、$\vec{x}$ と $\vec{y}$ が同じ方向&反対の向きであること ($t \le 0$ である) が必要十分である (そのことを証明するには、上の定理の証明を真似をすれば良い)。

Schwarz の不等式の別証明 (あらすじ) $\vec{y} = \vec{0}$ のときは明らかなので、$\vec{y} \ne \vec{0}$ とする。原点と $\vec{y}$ を通る直線に、$\vec{x}$ から垂線を下ろして、交点を $\vec{z}$ とする (昔風の表現をすると、$\vec{x}$ からその直線に下ろした垂線の足)。このとき直角三角形が出来るので

$$\|\vec{z}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{z}\|^2 = \|\vec{x}\|^2$$

が成り立つ (ピタゴラスの定理)。ゆえに $\|\vec{z}\|^2 \le \|\vec{x}\|^2$. これから

$$\|\vec{z}\| \le \|\vec{x}\|.$$

$\vec{z}$ を $\vec{x}$, $\vec{y}$ で表した式をこの不等式に代入すると、Schwarz の不等式が得られる。つまり Schwarz の不等式は、直角三角形では、斜辺が一番長い、という意味を持っている。 ■

高等学校流の内積の幾何学的定義　高等学校の数学では、内積を図形的に定義することがある。$\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ ($\theta \in [0,\pi]$) とするとき、

$$(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta$$

として内積を定義するわけである。一般に $-1 \le \cos\theta \le 1$ であるから、

$$-\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \le (\vec{x},\vec{y}) \le \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

は明らかである。等号が成立する条件も分かりやすい。(例えば、$\vec{x}$ と $\vec{y}$ が同じ方向＆同じ向きとは、$\theta = 0$ ということで、それは $\cos\theta = 1$ や $(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ と同値である。) この授業では、図が描けるとは限らない一般の $\mathbf{R}^n$ のベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ について

$$(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

で内積を定義しているので、Schwarz の不等式は上でやったような証明をすることが必要になる。逆に $\vec{x},\vec{y} \ne \vec{0}$ とするとき、Schwarz の不等式から

$$\cos\theta = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$$

を満たす $\theta \in [0,\pi]$ として、$\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角 θ が定義できることになる。■

命題 4.7 (ノルムの公理) $\mathbf{R}^n$ のノルム $\|\cdot\|$ は次の性質を満たす。

(i) $\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\|\vec{x}\| \ge 0.$$

$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = 0.$$

(ii) $\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|.$$

(iii) $\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \qquad$$ (**三角不等式**あるいは凸(とつ)不等式と呼ぶ).

この不等式で等号が成り立つための必要十分条件は、$\vec{x}$ と $\vec{y}$ が向きまで込めて同じ方向 (すなわち片方がもう一方の非負実数倍) であること。

三角不等式は、「三角形の任意の 2 辺の (長さの) 和は、残りの 1 辺より大きい」という初等幾何の定理の一般化であると考えられる。$\vec{x}$ と $\vec{y}$ が同じ方向＆同じ向きであるとき、三角形がつぶれて、$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ が成り立つ。

証明　(1), (2) は簡単だから、(3) のみ示す。証明すべき式の両辺は 0 以上だから、2 乗した両辺を比較すればいい。

$$\begin{aligned}(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 - \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= (\|\vec{x}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2) - (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) \\ &= (\|\vec{x}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2) - (\|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x},\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2) \\ &= 2(\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| - (\vec{x},\vec{y})) \ge 0. \quad \text{(Schwarz の不等式による)}\end{aligned}$$

等号成立の条件については読者に任せる。 ■

「三角形の任意の２辺の差は残りの１辺より小さい」という定理もある。これに対応する次の不等式がある。

例題 4.1 (逆三角不等式 (一般に通用する呼び方ではない))

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| \geq \Bigl| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \Bigr| \quad (\vec{x},\,\vec{y} \in \mathbf{R}^n)$$

を示せ。

解答 (両辺共に正だから、自乗して比較しても良い[1]。) ここでは、三角不等式から導く。

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{x}-\vec{y}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}\|$$

から

$$\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|. \tag{3}$$

$\vec{x}$ と $\vec{y}$ は任意であるから、入れ換えても成立する:

$$\|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leq \|\vec{y}-\vec{x}\|.$$

すなわち

$$-\|\vec{x}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|. \tag{4}$$

(3) と (4) をまとめると

$$-\|\vec{x}-\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

ゆえに

$$\Bigl| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \Bigr| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|. \quad ■$$

定義 4.8 ($\mathbf{R}^n$ のユークリッド距離) $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して、$d(\vec{x},\vec{y})$ を

$$d(\vec{x},\vec{y}) := \|\vec{x}-\vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

で定義し、$\vec{x}$ と $\vec{y}$ の**距離** (distance) と呼ぶ。

命題 4.7 より、容易に次の命題が得られる。

[1] この場合、内積の性質を使って証明することができる。

命題 4.9 (距離の公理) $\mathbf{R}^n$ の距離 $d = d(\cdot,\cdot)$ は次の性質を満たす。

(1) $\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して
$$d(\vec{x},\vec{y}) \geq 0.$$

$\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

(2) $\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して
$$d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x}).$$

(3) $\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\forall \vec{y} \in \mathbf{R}^n$, $\forall \vec{z} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y}) \quad (\text{三角不等式}).$$

注意 4.10 せっかく $d(\cdot,\cdot)$ という記号を定義したのだけれど、$d(\vec{x},\vec{y})$ よりも $\|\vec{x}-\vec{y}\|$ の方が簡潔だから、以後この講義では使わない。(距離の公理を見せるのが目的であった。) ■

5　1変数ベクトル値関数の極限の定義

ノルムの話をしたのは、極限の定義をするためである、ここではまず 1 変数ベクトル値関数の極限の定義をしよう。

極限の定義　$\vec{f}(x) \to A$ とは、$\vec{f}(x)$ と $\vec{A}$ との距離が 0 に収束することと定義する。

定義 5.1 (ベクトル値関数の極限の定義) I は $\mathbf{R}$ の区間、$a \in \overline{I}$, $\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$, $\vec{A} \in \mathbf{R}^m$ とするとき、
$$\lim_{x\to a} \vec{f}(x) = \vec{A} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{x\to a} \left\|\vec{f}(x) - \vec{A}\right\| = 0.$$

一見、lim の定義に lim を使っていて、循環論法をしているようだが、$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右辺は実数値関数の極限なので、すでにおなじみのものである。ε-δ 論法で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left\|\vec{f}(x) - \vec{A}\right\| < \varepsilon$$

ということになる。これは

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\forall x \in I : |x-a| < \delta) \qquad \left\|\vec{f}(x) - \vec{A}\right\| < \varepsilon$$

と書いても同じことである。

閉包 (区間の場合)　$\overline{I}$ は I の閉包であるとする。閉包については、1 年生のときに習ったと思うが、後で一般の場合 ($\mathbf{R}^n$ の部分集合) に正確な定義を与える。ここでは、区間の端の点を加える、と覚えておけばよい。詳しく書くと、

- $I = (a,b)$, $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ $(a,b \in \mathbf{R}$, $a < b)$ の場合は、$\overline{I} = [a,b]$.
- $I = (a,\infty)$, $[a,\infty)$ $(a \in \mathbf{R})$ の場合は $\overline{I} = [a,\infty)$

- $I=(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ ($b\in\mathbf{R}$) の場合は $\overline{I}=(-\infty,b]$.

$a\in I$ でなく、$a\in\overline{I}$ としたのはなぜか？例で説明する。実変数の対数関数 $f(x)=\log x$ は (普通) $I:=(0,\infty)$ を定義域とする。定義域 I に属する a, 例えば $a=1$ に対して $\lim_{x\to a}f(x)$ を考えるのは自然である。

$$\lim_{x\to 1}\log x=\log 1=0.$$

$a=0$ は定義域 I に属していないが ($\overline{I}$ には属していて)、$\lim_{x\to a}f(x)$ を考えることがある。

$$\lim_{x\to 0}\log x=-\infty.$$

しかし $\overline{I}$ に属さない $a=-1$ に対して、$\lim_{x\to a}f(x)$ を考えるのはナンセンスである。定義域 I に属する x によって近づくためには、a は $\overline{I}$ に属する必要がある。

もう一つ例をあげると、$I=(0,\infty)$, $f\colon I\ni x\mapsto\dfrac{\sin x}{x}\in\mathbf{R}$ に対して、

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

$0\notin I$, $0\in\overline{I}$ であることに注意しよう。

6 演習

問1 I を $\mathbf{R}$ の区間、$\vec f\colon I\to\mathbf{R}^n$, $\vec g\colon I\to\mathbf{R}^n$ とする。
(1) $\vec f$ と $\vec g$ がともに微分可能であるならば

$$\frac{d}{dt}\left(\vec f(t),\vec g(t)\right)=\left(\vec f\,'(t),\vec g(t)\right)+\left(\vec f(t),\vec g\,'(t)\right)\quad(t\in I)$$

が成り立つことを示せ。
(2) 質点が等速運動するならば (つまり時刻 t における位置を $\vec f(t)$ と表すとき、$\left\|\vec f\,'(t)\right\|$ が定数関数となる)、速度と加速度はつねに直交することを示せ。

(演習中はヒントを小出しにした。)

参考文献