多変数の微分積分学1 第6回

桂田 祐史

2013 年 5 月 27 日

この授業用の WWW ページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

宿題の解説

問 5 (1) の解説をしないと。

後始末

問 4 (3), (4) は分かり辛い、という人がいたので、少しフォローしておく。$\dfrac{1}{\infty}=0$, $\dfrac{1}{+0}=\infty$ に相当する定理は、証明しておく方が便利なので、そうする。

命題 0.1 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$, $a\in\overline{\Omega}$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.

(2) $\forall x\in\Omega\ f(x)>0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

証明

(1) $\forall\varepsilon>0$ に対して、$R:=\dfrac{1}{\varepsilon}$ とおくと、$R>0$. $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ より、

$$\exists\delta>0\quad\forall x\in B(a;\delta)\cap\Omega\quad f(x)>R(>0).$$

このとき、

$$0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{R}=\varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.

(2) $\forall R\in\mathbf{R}$ に対して、$\varepsilon:=\dfrac{1}{|R|+1}$ とおくと、$\varepsilon>0$. $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$ であるから、

$$\exists\delta>0\quad\forall x\in B(a;\delta)\cap\Omega\quad |f(x)|<\varepsilon.$$

このとき、($f(x)>0$ に注意して)

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{|f(x)|}>\frac{1}{\varepsilon}=|R|+1>R.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$. ■

5　偏微分 (続き)

5.1　定義 (続き)

偏導関数、高階微分、C^k 級 $(0 \le k \le \infty)$ について述べる。
5/20 は次の (3) までやって、問 5 を出題して終わりました。

定義 5.1 (偏導関数、高階微分、C^k 級) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ とする。

(1) $j \in \{1, \dots, n\}$ とする。f が Ω で x_j について**偏微分可能**であるとは、$\forall x \in \Omega$ に対して、f は x で変数 x_j について偏微分可能であることをいう。このとき、写像

$$\Omega \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbf{R}^m$$

を f の変数 x_j に関する**偏導関数**と呼び、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f, \quad f_{x_j}$$

などの記号で表す。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ を f の **1 階偏導関数**と呼ぶ。

(3) $i, j \in \{1, \dots, n\}$ とする。f が Ω で変数 x_j について偏微分可能で、偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ が Ω で変数 x_i について偏微分可能であるとき、$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ を

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad f_{x_j x_i}$$

などの記号で表す。$i = j$ である場合、つまり $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ とも書く。

(4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ を f の **2 階偏導関数**と呼ぶ。

(5) 同様に任意の k $(k \in \mathbf{N},\ k \ge 3)$ に対して、f の $\boldsymbol{k}$ **階偏導関数**が定義される。

(6) $k \in \mathbf{N}$ とする。f が Ω で C^k **級**であるとは、f が Ω で k 階のすべての偏導関数を持ち、それらすべてと f 自身が Ω で連続であることをいう。

(7) f が Ω で C^∞ **級**であるとは、$\forall k \in \mathbf{N}$ に対して、f が Ω で C^k 級であることをいう。

(8) f が Ω で C^0 **級**であるとは、f が Ω で連続であることをいう。f 自身を f の 0 階偏導関数ともいう。

注意 5.2 (C^k 級の定義) C^k 級の定義は、上とは別の定義をしている本もある。よくあるのは、f が C^k 級であるためには、

(♡) f が k 階までのすべての偏導関数を持ち、それら偏導関数 (f 自身も含む) が連続

とするものである。後述の「C^1 級 $\Longrightarrow$ 全微分可能」の証明を精査すれば分かるように、k 階のすべての偏導関数の存在とそれらの連続性から、$k-1$ 以下の階数の偏導関数 (f 自身を含む) の連続性が導かれる。■

注意 5.3 (定義域が開集合である理由) 定義域を開集合としてあるので、$\forall a \in \Omega$ に対して、$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a;\varepsilon) \subset \Omega$ となるので、$|h| < \varepsilon$ なる任意の h に対して $a + he_j \in \Omega$ が保証される。この保証がないと議論が著しく面倒になる。

開集合でない Ω で定義された関数が微分可能とは、Ω を含む開集合 $\widetilde{\Omega}$ が存在して、f が $\widetilde{\Omega}$ 上で微分可能な関数 $\widetilde{f}$ に拡張可能なことと定義する場合が多い。■

5.2 偏微分の順序交換

定理 5.4 Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ は C^2 級とするとき、任意の $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a \in \Omega$ に対して、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

$i = j$ のときは明らかに成立するので、$i \neq j$ の場合の証明が問題となる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + he_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\lim_{k\to 0} \frac{f(a + he_i + ke_j) - f(a + he_i)}{k} - \lim_{k\to 0} \frac{f(a + ke_j) - f(a)}{k}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{1}{hk}\left(f(a + he_i + ke_j) - f(a + he_i) - f(a + ke_j) + f(a)\right)
\end{aligned}$$

であり、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{1}{hk}\left(f(a + he_i + ke_j) - f(a + he_i) - f(a + ke_j) + f(a)\right)$$

である。極限の順序の問題であることが分かる。実は

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk}\left(f(a + he_i + ke_j) - f(a + he_i) - f(a + ke_j) + f(a)\right)$$

が存在するので、両者は一致する、というのがあらすじである。

証明 $i = j$ の場合に成り立つことは明らかなので、$i \neq j$ の場合を証明する。x_i と x_j 以外の変数 x_k ($k \neq i, j$) は、$x_k = a_k$ と固定しているので、本質的に 2 変数関数の話である。$x_i = x$, $x_j = y$, $a_i = a$, $a_j = b$, $f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n) = f(x, y)$ として、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

を示せば良い。

$$\Delta(h, k) := f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$$

とおく[1]。$\phi(x) := f(x, b+k) - f(x,b)$ とおくと、十分小さな正数 ε を取ると、$0 < |h| < \varepsilon$, $0 < |k| < \varepsilon$ を満たす任意の h, k に対して、$\exists \theta, \theta' \in (0,1)$ s.t.

$$\begin{aligned}\Delta(h,k) &= \phi(a+h) - \phi(a)\\ &= \phi'(a+\theta h)h = \left[f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)\right] h\\ &= f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)hk.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k) = f_{xy}(a,b).$$

同様に $\psi(y) := f(a+h, y) - f(a,y)$ とおくと、$0 < |h| < \varepsilon$, $0 < |k| < \varepsilon$ を満たす任意の h, k に対して、$\exists \theta'', \theta'' \in (0,1)$ s.t.

$$\Delta(h,k) = \psi(b+k) - \psi(b) = f_{yx}(a+\theta''' h, b+\theta'' k)hk.$$

これから

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yx}(a+\theta''' h, b+\theta'' k) = f_{yx}(a,b).$$

ゆえに

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b). \blacksquare$$

余談 5.1 (定理の名前) ところで、上の定理を「Schwarz の定理」と呼ぶ本が少なくないのだが、それが正しいのか、確信が持てない。高木 [1] には、上の定理以外に以下の定理が紹介されている。

命題 5.5 (Schwarz) ある領域で f_x, f_y, f_{xy} が存在して、領域内の 1 点において f_{xy} が連続ならば、その点において f_{yx} も存在し、かつ $f_{xy} = f_{yx}$.

命題 5.6 (Young) ある領域で f_x, f_y が存在して、それらが領域内の 1 点において全微分可能ならば、その点において $f_{xy} = f_{yx}$.

余談 5.2 (細かい注意: C^2 級でなくても 2 回全微分可能ならば OK) 次の定理は、上記の Young の定理に含まれるようではあるが、仮定が自然なので、重要であると筆者は考える。

シュヴァルツ [2], p.

f が 2 回全微分可能であれば、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a). \tag{1}$$

ところが「2 回全微分可能」という概念の定義を省略するテキストが多い。f が Ω で 2 回全微分可能であるとは、f が Ω で全微分可能で、すべての偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ が Ω で全微分可能なことをいう。この定義は極めて自然なのだが、それを説明するのに案外と手間がかかるので (扱う

[1] これは二つの差分を施したものであり、それらは順序交換可能である:

$$\Delta(h,k) = \left[\left[f(x,y)\right]_{x=a}^{x=a+h}\right]_{y=b}^{y=b+k} = \left[\left[f(x,y)\right]_{y=b}^{y=b+k}\right]_{x=a}^{x=a+h}.$$

関数の範囲を少し広げると (例えばシュヴァルツ [2], かいつまんで言うと、関数の終域を $\mathbf{R}^m$ でなく、$\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間、と少し一般化する)、導関数 $x \mapsto f'(x)$ の導関数が定義できるので、2 回微分可能の概念が自然に確定する。それは全微分可能であり、かつすべての 1 階偏導関数が全微分可能であることと同値であるのはすぐ分かる。)、ここでは省略する。

応用上の観点からは、2 回全微分可能であるが、C^2 級ではないような関数が登場することは稀なので、ここに述べたことを気にする必要はあまりないのかもしれない。それが現在の微分積分学のテキストの多くで、高階の全微分の概念を省略して、C^k 級という概念だけで済まされる理由であろう。■

次の例は 1 年生のときに学んだ（のでは？)。

例 5.7 (1 回微分可能だが、C^1 級でない関数) 次の関数は 1 回微分可能であるが、C^1 級ではない。

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

f は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ で C^∞ 級である。0 で微分可能であることを示す。$h \neq 0$ とするとき

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = h \sin \frac{1}{h} \to 0 \quad (h \to 0)$$

実際

$$\left| h \sin \frac{1}{h} - 0 \right| = |h| \left| \sin \frac{1}{h} \right| \le |h| \cdot 1 = |h| \to 0 \quad (h \to 0)$$

であるから。ゆえに $f'(0) = 0$. ところで $x \neq 0$ に対して、

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

であり、これは $x \to 0$ のとき、$0 = f'(0)$ に収束しない (出来ますか?)。ゆえに f' は 0 では連続でない。ゆえに f は C^1 級でない。

> たまに「$x = 0$ のとき $f(x) = 0$ だから $f'(0) = 0$」というトンでもないことをする人がいる。もしそれが正しければ、$g(x) = x$ に対して、$x = 0$ のとき $g(x) = 0$ だから $g'(0) = 0$ となるはずだが、$g'(0) = 1$ であるから矛盾する。$f(h)$ は $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ で計算することを納得すること。

■

問 2 変数関数で、1 回前微分可能であるが、C^1 級ではない関数の例をあげよ。

問 2 回微分可能であるが、C^2 級でない関数の例をあげよ。

一方で、超関数[2]の世界では、つねに (1) が成立する。結局、応用上現れるほとんどの場合に、偏微分の順序交換が成立すると思ってよい。

例えば f が C^3 級ならば

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}.$$

[2]超関数とは、微積分が自由に出来るように関数概念を拡張したもの。

結局 f が C^k 級ならば、k 階までの偏導関数は、各変数 x_i $(i=1,\dots,n)$ について何回偏微分したかで定まり、

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}},\quad i_1+i_2+\cdots+i_n=k$$

という形に表すことが出来る。

しかし、つねに (1) が成立するわけではない。反例をあげておく。

例 5.8 (偏微分の順序交換が成立しない関数, Peano の例)

$$f(x,y):=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

について $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$ を示せ。
(解) f_{xy} は、f_x を y について偏微分したものであるから、

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}.$$

$$f_x(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0+k,0)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{k\cdot0\cdot\frac{k^2-0^2}{k^2+0^2}-0}{k}=\lim_{k\to0}0=0,$$

$h\neq0$ のとき、

$$\begin{aligned} f_x(0,h)&=\lim_{k\to0}\frac{f(0+k,h)-f(0,h)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{kh\frac{k^2-h^2}{k^2+h^2}-0\cdot h\cdot\frac{0^2-h^2}{0^2+h^2}}{k} \\ &=\lim_{k\to0}\frac{h(k^2-h^2)}{k^2+h^2}=\frac{h(0-h^2)}{0^2+h^2}=-h. \end{aligned}$$

ゆえに

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{-h-0}{h}=\lim_{h\to0}(-1)=-1.$$

同様に

$$f_{yx}(0,0)=1$$

が得られる。 ■

問 6 $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を次式で定めるとき、$f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を求めよ。

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)). \end{cases}$$

6 全微分

やや天下りに定義をして、だんだんそれがもっともなことを納得してもらう。少しでも天下り感をなくそう、ということで。

6.1 定義

1変数関数 $f\colon I \to \mathbf{R}^m$ (I は $\mathbf{R}$ の区間), $a \in I$ の場合、

$$
\begin{aligned}
f \text{ が } a \text{ で微分可能} &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{が存在}\\
&\Leftrightarrow \exists A \in \mathbf{R}^m \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A\\
&\Leftrightarrow \exists A \in \mathbf{R}^m \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{|h|} = 0.
\end{aligned}
$$

実数を成分とする m 行 n 列の行列全体の集合を $M(m,n;\mathbf{R})$ で表す。

定義 6.1 (全微分可能性, 全微分係数, 導関数) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ とする。

(1) $a \in \Omega$ とする。f が a で (**全**) **微分可能**であるとは、

$$\exists A \in M(m,n;\mathbf{R}) \quad \text{s.t.} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|}{\|h\|} = 0$$

が成り立つことをいう。(この A は実は f と a から一意的に定まる — 証明は後述。)
このとき A を f の a における (**全**) **微分係数**とよび、$f'(a)$ で表す。

(2) f が Ω で (**全**) **微分可能**であるとは、$\forall x \in \Omega$ で f が全微分可能であることをいう。このとき、

$$\Omega \ni x \mapsto f'(x) \in M(m,n;\mathbf{R})$$

を f の**導関数**とよび、f' で表す。

問 f の a における全微分係数は、もし存在するならば一意的であることを示せ (すぐ後の定理の証明を見れば分かることだが、直接証明も可能である)。

6.2 全微分可能性, 連続性, 偏微分可能性、C^1 級

定理 6.2 (全微分可能ならば連続かつすべての変数につき偏微分可能で全微分係数はヤコビ行列) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $a \in \Omega$, f は a で全微分可能 (i.e., $\exists A \in M(m,n;\mathbf{R})$ s.t. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|}{\|h\|} = 0$) とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) f は a で連続である。

(2) f は a で、すべての変数 x_j について偏微分可能で、

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right).$$

(これで全微分係数の一意性の一つの証明が得られる。)

証明のために、行列のノルムを導入し、その性質を一つ紹介する[3]。$A = (a_{ij}) \in M(m,n;\mathbf{R})$

[3]実は、$\displaystyle\lim_{h\to 0} Ah = 0$ を証明しているだけなので、「成分を考えて1次多項式は関数として連続」と言えば済む。しかし、線形写像 $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbf{R}^m$ の連続性を見通し良く示すことは有意義であると思うので、少々大げさではあるが、行列のノルムを導入してみた。

とするとき、

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

とおき、これを A のノルムとよぶ。

$M(m,n;\mathbf{R})$ の元 A を、自然に (強引に？) $\mathbf{R}^{mn}$ の元に対応させたとき、その ($\mathbf{R}^{mn}$ における) ノルムと $\|A\|$ は一致することから、

$$\|A\| \geq 0, \quad \text{等号成立} \Leftrightarrow A = 0,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$$

などが成立することは明らかである。

命題 6.3 $\forall A \in M(m,n;\mathbf{R})$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\|Ax\| \leq \|A\| \ \|x\|$$

が成り立つ。

証明 A の第 i 行ベクトルを転置したものを $\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{R}^n$ とする。

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

であり、

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^T \end{pmatrix}, \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{a}_i\|^2},$$

$$Ax = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T x \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, x) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, x) \end{pmatrix}.$$

Schwarz の不等式から、

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{a}_i, x)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{a}_i\|^2 \|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{a}_i\|^2\right) \|x\|^2 = \|A\|^2 \|x\|^2.$$

ゆえに

$$\|Ax\| \leq \|A\| \ \|x\|. \blacksquare$$

定理 6.2 の証明 f が a で全微分可能であるから、$\exists A \in M(m,n;\mathbf{R})$ s.t.

$$(\sharp) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0.$$

(1) $h \to 0$ のとき、$\|Ah\| \le \|A\|\ \|h\| \to 0$ であるから、$\|Ah\| \to 0$ であることに注意しておく。

$$f(a+h)-f(a) = f(a+h)-f(a)-Ah+Ah = \|h\| \frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{\|h\|} + Ah$$

であるから、$h \to 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\|f(a+h)-f(a)\| &= \left\| \|h\| \frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{\|h\|} + Ah \right\| \\ &\le \|h\| \frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|}{\|h\|} + \|Ah\| \to 0 \cdot 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a).$$

すなわち f は a で連続である。

(2) 突然だが、ベクトルを表す文字の上に $\vec{}$ を書くことにする。$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ とおくと

(再掲 ♯)
$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{a}) - A\vec{h}}{\left\| \vec{h} \right\|} = \vec{0}$$

において、第 i 成分は、

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f_i\left(\vec{a}+\vec{h}\right) - f_i(\vec{a}) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} h_k}{\left\| \vec{h} \right\|} = 0.$$

$j \in \{1, \dots, n\}$ に対して、$\vec{h} = h\vec{e}_j$ とすると、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} h_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} h \delta_{kj} = a_{ij} h$ であるから

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(\vec{a} + h\vec{e}_j) - f_i(\vec{a}) - a_{ij} h}{|h|} = 0.$$

これから

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(\vec{a} + h\vec{e}_j) - f_i(\vec{a})}{h} = a_{ij}.$$

ゆえに f_i は $\vec{a}$ で変数 x_j につき偏微分可能で、

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a}) = a_{ij}.$$

ゆえに

$$A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a}) \right). \blacksquare$$

この定理によって、f が全微分可能であるとき、その全微分係数は偏微分することで求められることが分かった。偏微分は本質的に 1 変数関数の世界の話であるから、簡単に実行できることが多い。

全微分係数の一意性の別証明　$A, B \in M(m, n; \mathbf{R})$ が

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0, \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Bh}{\|h\|} = 0$$

を満たすならば、実は $A = B$ であることを証明する。

まず

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(A-B)h}{\|h\|} &= \lim_{h \to 0} \frac{(f(a+h) - f(a) - Bh) - (f(a+h) - f(a) - Ah)}{\|h\|} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Bh}{\|h\|} - \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} \\
&= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

もし $A = B$ でなければ、$B - A \neq 0$. ゆえに $\exists \widetilde{h} \in \mathbf{R}^n$ s.t. $(B - A)\widetilde{h} \neq 0$. このとき、$h = \varepsilon \widetilde{h}$ を考えると、$\varepsilon \to 0$ のとき $h \to 0$ であるから、

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(A-B)(\varepsilon \widetilde{h})}{\left\| \varepsilon \widetilde{h} \right\|} = 0.$$

ゆえに

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left\| (A-B)(\varepsilon \widetilde{h}) \right\|}{\left\| \varepsilon \widetilde{h} \right\|} = 0.$$

ところが

$$\frac{\left\| (A-B)(\varepsilon \widetilde{h}) \right\|}{\left\| \varepsilon \widetilde{h} \right\|} = \frac{|\varepsilon| \left\| (A-B)\widetilde{h} \right\|}{|\varepsilon| \left\| \widetilde{h} \right\|} = \frac{\left\| (A-B)\widetilde{h} \right\|}{\left\| \widetilde{h} \right\|} \neq 0 \quad (\varepsilon \text{ によらない } 0 \text{ でない定数})$$

であるから、矛盾である。■

> **定理 6.4 (C^1 級ならば全微分可能)** Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f \colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ はすべての変数 x_j につき Ω で偏微分可能で、偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \colon \Omega \to \mathbf{R}$ は連続とする。このとき、f は Ω で全微分可能である。

ここで時間切れ。

参考文献

[1] 高木貞治（ていじ）：解析概論 改訂第 3 版, 岩波書店 (1961).

[2] L. シュヴァルツ：シュヴァルツ解析学 2 微分法, 東京図書 (1970).