多変数の微分積分学1 第7回

桂田 祐史

2013年6月3日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

1 宿題の解説

問6についてはプリントを配ってしまう。タイム・イズ・マネー。

2 前回の後始末

2.1 偏微分の順序交換の定理の証明の訂正

偏微分の順序交換の定理の証明中、

$$\forall h, \exists\theta\in(0,1), \forall k, \exists\theta'\in(0,1) \quad \Delta(h,k)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a+\theta h, b+\theta' k)hk$$

のようなことを書いた覚えがあるが、これは完全なミス (変な感じがしたのに間違いに気がつかなかった)。最初に h, k が与えられて、それから θ, θ' を定めるので

$$\forall h, \forall h', \exists\theta\in(0,1), \exists\theta'\in(0,1) \quad \Delta(h,k)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a+\theta h, b+\theta' k)hk$$

が正しい。

2.2 偏微分の順序交換

例えば f が C^3 級ならば、

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2\partial x_1\partial x_1}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_1}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2}.$$

(各等号の理由をちゃんと言えるか？考えてみよう。)

結局 f が C^k 級ならば、k 階の偏導関数は、各変数 x_i $(i=1,\cdots,n)$ について何回偏微分したかだけで定まり、

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}, \quad i_1+i_2+\cdots+i_n=k$$

という形に表すことが出来る。

2.3　余談: 有限次元空間の間の線形写像の連続性

線形写像 $f\colon \mathbf{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbf{R}^m$ の連続性を示すのに、不等式

$$\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$$

を用いた。これは行列のノルムを重要であると考えたため、紹介する良い機会と考えたためであるが、単に f の連続性を示すだけであれば、これまでと同様に次のようにすれば良い。

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ とおくと、任意の i に対して

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n).$$

これは $x_1, \cdots, x_n$ の実係数 (1 次) 多項式であるから、$f_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は連続である。ゆえに $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ は連続である。

線形写像はつねに連続というわけではない。無限次元線形空間には、線形演算を連続とするような位相が複数存在し、線形写像はつねに連続というわけではなくなる。そういうものを扱うのに、成分に分解して考えるやり方はほとんど役に立たない。一方、線形写像のノルムという考え方は有効である場合が多い。

おおざっぱにまとめると

> 無限次元空間における線形写像については、成分に分解して考えるという方法は無力で、ノルムを用いる方法が重要になってくる。

6　全微分 (続き)

Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $a \in \Omega$ とするとき、f が a で全微分可能であるとは、

$$\exists A \in M(m,n;\mathbf{R}) \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\left(f(a+h) - f(a) - Ah\right) = 0$$

が成り立つことと定義した。ただし実数を成分とする m 行 n 列の行列全体の集合を $M(m,n;\mathbf{R})$ で表す。

全微分可能ならば、連続かつ偏微分可能であることは証明した。

定理 6.1 (C^1 級ならば全微分可能) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ はすべての変数 x_j につき Ω で偏微分可能で、偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ は連続とする。このとき、f は Ω で全微分可能である。

証明　Ω が開集合であるから、$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a;\varepsilon) \subset \Omega$. 任意の $i \in \{1, \cdots, n\}$, $h \in \mathbf{R}^n$,

$0<\|h\|<\varepsilon$ に対して、

$$\begin{aligned}
f_i(a+h)-f_i(a) &= f_i(a_1+h_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)-f_i(a_1,a_2,\dots,a_n) \\
&= f_i(a_1+h_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)-f_i(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n) \\
&\quad + f_i(a_1,a_2+h_2,a_3+h_3\dots,a_n+h_n)-f_i(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n) \\
&\quad + f_i(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)-f_i(a_1,a_2,a_3,a_4+h_4,\dots,a_n+h_n) \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\quad + f_i(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n+h_n)-f_i(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n).
\end{aligned}$$

平均値の定理より、$\exists\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n\in(0,1)$ s.t.

$$f_i(a+h)-f_i(a)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+\theta_jh_j,a_{j+1}+h_{j+1},\dots,a_n+h_n)h_j.$$

ゆえに

$$f_i(a+h)-f_i(a)-\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)h_j=\sum_{j=1}^n\varepsilon_{ij}(h)h_j.$$

ただし、

$$\varepsilon_{ij}(h):=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+\theta_jh_j,a_{j+1}+h_{j+1},\dots,a_n+h_n)-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\quad(j=1,\dots,n).$$

$h\to0$ のとき

$$\|(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+\theta_jh_j,a_{j+1}+h_{j+1},\dots,a_n+h_n)-a\|^2\le\sum_{j=1}^n h_j^2=\|h\|^2\to0$$

であることと、f は C^1 級であると仮定したので $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は連続であることから、

$$\varepsilon_{ij}(h)\to0.$$

ゆえに、三角不等式と、$|h_j|\le\|h\|$ $(j=1,\dots,n)$ であることを用いると、

$$\frac{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^n\varepsilon_{ij}(h)h_j\right|}{\|h\|}\le\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^n|\varepsilon_{ij}(h)|\,|h_j|}{\|h\|}\le\sum_{j=1}^n|\varepsilon_{ij}(h)|\to0\quad(h\to0).$$

ゆえに

$$\frac{f_i(a+h)-f_i(a)-\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)h_j}{\|h\|}=\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^n\varepsilon_{ij}(h)h_j}{\|h\|}\to0\quad(h\to0).$$

これは f_i が a で全微分可能であることを示している。ゆえに $f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$ も a で全微分可能である。■

これから、関数の 1 階偏導関数をすべて求めて (これは容易な場合が多い — ほとんど高校数学)、それらが連続関数であることが確められれば (やり方は演習しているはず)、その関数

が全微分可能であることが分かる。これは与えられた関数が全微分可能であることの強力な確認手段である。

この定理の証明では、f がすべての 1 階偏導関数を持ち、それらが連続であることしか用いていない。つまり f の連続性は仮定していない。それで全微分可能であることが示されたので、「全微分可能ならば連続」という定理によって、f は連続である。ゆえに次のことが分かった。

系 6.2 f が C^1 級であるためには、f がすべての変数 x_j に関して偏微分可能で、$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ と f が連続であることが必要十分である。

本によっては、後者の条件で C^1 級を定義している。

6.3 諸条件の間の関係を振り返る

多変数関数の全微分可能性、偏微分可能性、C^1 級等の条件の間の関係を振り返ってみよう。

まず、1 変数関数の場合は非常に簡単である (要点は「微分可能ならば連続」くらいで、証明も高校数学)。

1 変数関数の場合

$$C^1\text{級} \quad \Longrightarrow \quad \text{微分可能} \quad \Longrightarrow \quad \text{連続}$$

(C^1 級とは、微分可能かつ導関数が連続なことであるから、左の $\Longrightarrow$ は明らかである。右の $\Longrightarrow$ は高校数学である。)

多変数関数の場合は、微分に (大きく分けて) 二つの概念があり、C^1 級の概念もやや覚えにくい (実際、勘違いして覚えている人がかなり多い)。

多変数関数の場合

$$\begin{array}{ccccl} C^1\text{級} & \Longrightarrow & \text{微分可能} & \Longrightarrow & \text{連続} \\ & & & \searrow & \text{各変数につき偏微分可能} \end{array}$$

(C^1 級とは、各変数につき偏微分可能かつすべての 1 階偏導関数が連続ということである。一番左の $\Longrightarrow$ も明らかではない。右の $\Longrightarrow$ は 1 変数の場合と本質的に同じ。$\searrow$ は 1 変数関数にはなかったもので重要。)

6.4 微分の例

6.4.1 Jacobi 行列, gradient ベクトル

Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$a \in \Omega$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ が a で微分可能とするとき、$f'(a)$ は行列であった。具体的には、$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくとき、

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

この行列を f の (a における) **Jacobi** (ヤコビ) **行列**と呼ぶ。

さて、$m = 1$ の場合を考えよう。このとき、

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

と、ヤコビ行列は 1 行 n 列の行列、すなわち n 次元横ベクトルになる。この転置である n 次元縦ベクトルを $\operatorname{grad} f(a)$ または $\nabla f(a)$ で表し、f の (a における) **gradient** (**勾配ベクトル**) と呼ぶ:

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) := f'(a)^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

記号 ∇ は単独でも **nabla** (ナブラ) と呼ばれ、

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

という意味で用いられる。いわゆる**ベクトル解析**では多用される。

6.4.2 1 次関数, 2 次関数

例 6.3 (1 次関数の微分) $A = (a_{ij}) \in M(m, n; \mathbf{R})$, $b = (b_i) \in \mathbf{R}^m$, $c \in \mathbf{R}$ とするとき、

$$f(x) := Ax + b \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を定めると、f は $\mathbf{R}^n$ で全微分可能で、

$$f'(x) = A.$$

(証明 1) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ とおくと、

$$f_i(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j + b_i.$$

ゆえに

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + b_i\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} x_k + \frac{\partial}{\partial x_j} b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{jk} + 0 = a_{ij}.$$

ここで Kronecker のデルタ $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$ と、任意の数列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ について成り立つ公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k \delta_{kj} = A_j$ を用いた。

$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は定数関数であるから (あるいは多項式関数であるから)、$\mathbf{R}^n$ で連続である。ゆえに f は $\mathbf{R}^n$ で C^1 級であるから、全微分可能で、

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) = (a_{ij}) = A.$$

(証明 2) $\forall h \in \mathbf{R}^n$ に対して、$f(a+h) - f(a) = A(a+h) + b - (Aa + b) = Ah$ であるから、$h \neq 0$ のとき

$$\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0.$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

もちろん、$A \in M(m, n; \mathbf{R})$. ゆえに f は a で全微分可能で、$f'(a) = A$.

もっと具体的な例。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7$, $y_2 = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8$ であるから、

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = 3,$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 4, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 5, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_3} = 6$$

であり、ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

例 6.4 (2 変数 2 次関数) a, b, c, p, q, r を実定数とするとき、

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$$

で定まる $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ に対して、 $f'(x, y)$ を求めよ。

解　既に偏導関数の計算はやってある (例 **??**)。$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ は、ともに x と y の多項式関数で、連続であるから、f が C^1 級であることが分かる[1]。ゆえに全微分可能であり、導関数は、偏導関数を並べた

$$f'(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(2ax+2by+p,2cy+2bx+q).$$

ちなみに

$$\nabla f(x,y)=f'(x,y)^T=\begin{pmatrix}2ax+2by+p\\2cy+2bx+q\end{pmatrix}.\quad\blacksquare$$

例 6.5 (2 次関数の微分) n 変数 $x_1,\cdots,x_n$ に関する 2 次関数とは、

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c\quad(x\in\mathbf{R}^n)$$

という式で表される関数だということには誰でも賛成してくれるであろう (ここで a_{ij}, b_i, $c\in\mathbf{R}$)。

$A:=(a_{ij})\in M(n,n;\mathbf{R})$, $b:=(b_i)\in\mathbf{R}^n$, $x:=(x_i)\in\mathbf{R}^n$ とおくと、

$$f(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c.$$

実際、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ は Ax の第 i 成分であるから、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)x_i=(Ax,x)$.

このままでは、関数の表示に一意性がないためもあって、通常

$$a_{ij}=a_{ji}\quad(\forall i,j)$$

を仮定する (例えば $3x_1x_2+x_2x_1$, $x_1x_2+3x_2x_1$, $2x_1x_2+2x_1x_2$ のいずれも同じ関数を表すので、係数を等しく割り振った $2x_1x_2+2x_2x_1$ のみ使うことにする、ということである)。つまり行列 A に対称性を仮定する (線形代数で習う 2 次形式と同じ)。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}&=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_j}(x_ix_k)+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_j}x_i+\frac{\partial}{\partial x_j}c\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\delta_{ji}x_k+x_i\delta_{jk})+\sum_{i=1}^{n}b_i\delta_{ji}+0\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\delta_{ji}\right)x_k+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{jk}\right)x_i\right)+b_j\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_k+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i\right)+b_j.\end{aligned}$$

[1] 一般に、多項式関数は何度偏微分しても多項式関数で、それは連続であるから、多項式関数は C^∞ 級であることが分かる。

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k$ は Ax の第 j 成分である。また対称性より $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i = \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i$ も Ax の第 j 成分である。ゆえに

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \text{「}Ax\text{ の第 }j\text{ 成分」} + b_j = \text{「}Ax+b\text{ の第 }j\text{ 成分」}.$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = Ax+b.$$

ゆえに

$$\nabla f(x) = f'(x)^T = Ax+b.$$

偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ は $x_1, \dots, x_n$ についての多項式関数なので、$\mathbf{R}^n$ で連続である。ゆえに f は $\mathbf{R}^n$ で C^1 級であるので、全微分可能である。 ■

6.5 微分の意味

6.5.1 線形化写像は元の関数を近似する $f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a)$

(飛ばして、次の 6.5.2 を先にやった。ここは次回説明する。)

6.5.2 $\operatorname{grad} F$ はレベルセットの法線ベクトル

以下、Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は C^1 級とする。$c \in \mathbf{R}$ に対して、

$$L_c := \{x \in \Omega; F(x) = c\}$$

とおき、F のレベル c の**レベル・セット**と呼ぶ。

$L_c = \emptyset$ となることもありうるが、$a \in \Omega$ のとき、$c := F(a)$ とおくと、$a \in L_c$ が成り立つので、$L_c \neq \emptyset$ である。

例 6.6 $\Omega = \mathbf{R}^2$, $F(x,y) := x^2+y^2$ とするとき、L_1 は原点中心半径 1 の円周, L_2 は原点中心半径 $\sqrt{2}$ の円周, L_0 は原点 1 点からなる集合 $\{(0,0)\}$, $L_{-1} = \emptyset$. ■

例 6.7 Ω をある地図、$(x,y) \in \Omega$ に対して、$F(x,y)$ は (x,y) という地点の標高とするとき、L_c は高さ c の**等高線** (**contour**) である。 ■

実は、**$\nabla F(a)$ は、L_c の点 a における法線ベクトル**と呼ぶにふさわしいものである。実際、

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(a) - F'(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

が成り立つが、$c := F(a)$ とするとき、$\forall x \in L_c$ に対して $F(x) = c$ であることと、$F'(a)(x-a) = (\nabla F(a), x-a)$ であることから、

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(a) - F'(a)(x-a)}{\|x-a\|} &= \frac{c - c - (\nabla F(a), x-a)}{\|x-a\|} = -\frac{(\nabla F(a), x-a)}{\|x-a\|} \\ &= -\left(\nabla F(a), \frac{x-a}{\|x-a\|}\right)\end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{\substack{x\in L_c\\ x\to a}}\left(\nabla F(a),\frac{x-a}{\|x-a\|}\right)=0.$$

(以上 (と以下) の議論は「考察」であり、「証明」ではない。盲目的に信じ込まれても困るので、少し疵を指摘しておくと、L_c がどういう集合であるか、一般には良く分からない。そもそも L_c をたどって、a に近づくことが出来るのかも分からない。後で「陰関数定理」という定理を学ぶとこのあたりのことが解決される。)

$\nabla F(a)\neq 0$, $x\neq a$ であるとき、$\nabla F(a)$ と $x-a$ のなす角 $\theta(x)\in[0,\pi]$ が

$$(\nabla F(a),x-a)=\|\nabla F(a)\|\;\|x-a\|\cos\theta(x)$$

により定義できる。このとき

$$\lim_{\substack{x\in L_c\\ x\to a}}\cos\theta(x)=0$$

であるから

$$\lim_{\substack{x\in L_c\\ x\to a}}\theta(x)=\frac{\pi}{2}. \tag{$\angle R$}$$

(注意: $x\to a$ のとき $\dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ 自身が何かあるベクトルに収束するというわけではなく、収束が保証出来るのは角度だけである。)

以上の考察を背景に、次のように定義する。

定義 6.8 Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon\Omega\to\mathbf{R}$ が C^1 級の開集合、$a\in\Omega$, $\nabla F(a)\neq 0$ とする。このとき、

$$\{x\in\mathbf{R}^n;(\nabla F(a),x-a)=0\}$$

を、L_c の a における**接超平面**, $\nabla F(a)$ を L_c の a における**法線ベクトル**と呼ぶ。