多変数の微分積分学1 第11回

桂田 祐史

2013年7月1日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

1 演習タイム

問9 C^2 級の関数 $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ と正定数 c があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi,\eta) = u(x,t), \quad \text{すなわち} \quad v(\xi,\eta) := u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)$$

とおく。このとき次式を証明せよ (左辺、右辺どちらから始めても良い、余裕あれば両方)。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.$$

解 (右辺から左辺)

$$x = \frac{1}{2}(\xi+\eta), \quad t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi)$$

であるから、

$$x_\xi = \frac{1}{2}, \quad x_\eta = \frac{1}{2}, \quad t_\xi = -\frac{1}{2c}, \quad t_\eta = \frac{1}{2c}.$$

chain rule によって

$$\begin{aligned} v_\eta &= u_x x_\eta + u_t t_\eta = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2c}u_t, \\ v_{\eta\xi} &= \frac{1}{2}\left(u_{xx}x_\xi + u_{xt}t_\xi\right) + \frac{1}{2c}\left(u_{tx}x_\xi + u_{tt}t_\xi\right) = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c}u_{xt} + \frac{1}{4c}u_{tx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} \\ &= \frac{1}{4}\left(u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt}\right). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.$$

(左辺から右辺)

$$\xi_x = 1, \quad \xi_t = -c, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_t = c.$$

chain rule によって

$$\begin{aligned} u_t &= v_\xi\xi_t + v_\eta\eta_t = -cv_\xi + cv_\eta, \\ u_{tt} &= -c(v_{\xi\xi}\xi_t + v_{\xi\eta}\eta_t) + c\left(v_{\eta\xi}\xi_t + v_{\eta\eta}\eta_t\right) = c^2v_{\xi\xi} - c^2v_{\xi\eta} - c^2v_{\eta\xi} + c^2v_{\eta\eta} \\ &= c^2\left(v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}\right), \\ u_x &= v_\xi\xi_x + v_\eta\eta_x = v_\xi + c_\eta, \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.\blacksquare$$

7　平均値の定理と Taylor の定理 (続き)

7.2　平均値の定理 (続き)

平均値の定理をベクトル値関数に拡張することは出来ない。実数値関数の場合の定理の証明を振り返り、さかのぼると、実数値関数の最大値の存在まで行き着く。この証明を一般化するのが難しいことは理解できるであろう。ここでは一つの反例を示す。

例 7.1 (ベクトル値関数では平均値の定理が成り立たない) $f\colon \mathbf{R}^2 \ni x \mapsto \begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} \in \mathbf{R}$ は明らかに C^∞ 級であり、全微分可能である。$a=0$, $b=2\pi$ とするとき、

$$f(b)-f(a)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0.$$

一方

$$f'(x)=\begin{pmatrix}(\cos x)'\\(\sin x)'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

で、このノルムは $\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=1$ であるから、$f'(x)\neq 0$. 特に $\forall c\in(a,b)$ に対して、$f'(c)(b-a)\neq 0$. ゆえに $f(b)-f(a)$ と $f'(c)(b-a)$ は等しくなり得ない。 $\blacksquare$

7.3　Taylor の定理の準備

問 10　C^∞ 級の 2 変数関数 $f(x,y)$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$ と、$(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $(h,k)\in\mathbf{R}^2$ があるとき、

$$F(t):=f\left(a+th,b+tk\right)\quad(t\in\mathbf{R})$$

とおくとき、次の (1), (2) に答えよ[1]。　　——— 合成関数の微分法で、Taylor の定理の準備

(1) $F'(t)$, $F''(t)$, $\ldots$ を (いくつか) 計算せよ。

(2) $F^{(m)}(t)$ $(m\in\mathbf{N})$ の公式を推測し、数学的帰納法で証明せよ。

前半は計算であるが、要点は次の二つ。

(a) chain rule

(b) f が C^2 級ならば $f_{xy}=f_{yx}$, f が C^3 級ならば

$$f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx},\quad f_{yyx}=f_{yxy}=f_{xyy}.$$

f が C^∞ 級ならば、f の偏導関数は、x で何回、y で何回偏微分したかで決まり、$\dfrac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p\partial y^q}$ だけで表すことが出来る。

[1](授業でやるけれど) n 変数関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ について、$F(t):=f(a_1+th_1,a_2+th_2,\cdots,a_n+th_n)$ とおき、上と同様のことを行なえ。

多くの人が (1) で3階微分 $F'''(t)$ を計算できるくらいまで時間を取って、

$$
\begin{aligned}
F^{(m)}(t) &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{\partial^m f}{\partial x^r \partial y^{n-r}}(a+th, b+tk) h^r k^{m-r} \\
&= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(a+th, b+tk) \qquad \text{(乱暴であるが…)}
\end{aligned}
$$

を提示する。「$(a+b)^m$ を表す二項定理を思い出して下さい、その数学的帰納法による証明と同様にして証明できます。」

7.4 $(a_1 + \cdots + a_n)^m$ の展開 — 多項定理

この節の目標は次を証明することである。

$$
\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m &= \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_m \le n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} \\
&= \sum_{\substack{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \ \text{は非負整数} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m}} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}.
\end{aligned}
$$

参考のため、二項定理の復習から始める。

7.4.1 二項定理 (the binomial theorem)

授業では時間がないので、「二項定理は証明まで込めて自分で復習しておいて下さい」というのだろう。

定理 7.2 (二項定理 (the binomial theorem))

$$
(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}.
$$

高校数学では帰納法による証明が標準的と思われる[2]。

二項係数に関する次の公式は、Pascal の三角形を作るときにも使われるので、良く知っているはずである (知らずに Pascal の三角形を書いていたらダメよ)。

補題 7.3

$$
\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}.
$$

[2] $(a+b)^m = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ の右辺を展開して $a^k b^{m-k}$ が出て来るには、m 個の因子のうち、a を k 個選ぶということで、全部で $\binom{m}{k}$ 通りある、と数え上げることも出来る。

証明

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k} &= \frac{m!}{(k-1)!(m-(k-1))!}+\frac{m!}{k!(m-k)!}\\
&= \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1))!}+\frac{m!}{k!(m-k)!}\\
&= \frac{k}{k(k-1)!}\cdot\frac{m!}{(m-k+1))!}+\frac{m!}{k!}\cdot\frac{m-k+1}{(m-k+1)(m-k)!}\\
&= \frac{m!}{k!(m-k+1)!}\left(k+(m-k+1)\right)=\frac{m!(m+1)}{k!(m-k+1)!}\\
&= \frac{(m+1)!}{k!((m+1)-k)!}=\binom{m+1}{k}.\blacksquare
\end{aligned}$$

定理 7.2 の証明

帰納法による。$m=1$ のとき明らかに成り立つ。$m=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k &= (a+b)\sum_{r=0}^{n}\binom{k}{r}a^{k-r}b^r\\
&= \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^r+\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1}.
\end{aligned}$$

右辺第 1 項は

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^r=a^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}a^{k+1-r}b^r.$$

右辺第 2 項は、途中で $r+1$ を r' と置き換えて

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1} = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{(k+1)-(r+1)}b^{r+1} &= \sum_{r'=1}^{k+1}\binom{k}{r'-1}a^{k+1-r'}b^{r'}\\
&= \sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k+1-r}b^r+b^{k+1}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= a^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\left(\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}\right)a^{k+1-r}b^r+b^{k+1}\\
&= a^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r+b^{k+1}\\
&= \sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^r+b^{k+1}.
\end{aligned}$$

これは $m=k+1$ のときも成り立つことを示している。帰納法により、任意の自然数 m について成り立つ。■

この帰納法による証明は、問 10 の (2) の証明部分と本質的に同じである。

7.4.2　前半部分の証明 — 分配法則でとにかくバラす

ここでは

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^m = \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_m\le n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}$$

の証明をする。

分配法則は良く知っているであろう。

$$(a_1+\cdots+a_n)A = a_1A+\cdots+a_nA, \quad \text{つまり} \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)A = \sum_{i=1}^n (a_iA).$$

($\sum$ の外の数を中に入れる、ということ。)

これを 2 回使うと、

$$(a_1+\cdots+a_n)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j\right) = \sum_{i=1}^n\left(a_i\sum_{j=1}^n a_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a_ia_j)$$

同様にして、m 個の積の場合、m 回分配法則を用いて

$$(a_1+\cdots+a_n)^m = \sum_{i=1}^n\sum_{i_2=1}^n\cdots\sum_{i_m=1}^n (a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}).$$

この右辺を

$$\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_m\le n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}$$

と書くことにする。

こうして、

$$(a_1+\cdots+a_n)^m = \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_m\le n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}. \tag{1}$$

7.4.3　二項定理の一般化「多項定理 (the multinomial theorem)」

定理 7.4 (多項定理 (the multinomial theorem)) $n,m\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$ とするとき

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^m = \sum_{\substack{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\ \text{は非負整数} \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=m}} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}. \tag{2}$$

以下、インデックスが非負整数であることは常に仮定するので、それを書くのは省略する。ゆえに

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^m = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=m} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}.$$

二項定理が

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}a^rb^{n-r} = \sum_{\alpha+\beta=n}\frac{n!}{\alpha!\beta!}a^\alpha b^\beta$$

と書けることを注意しておく。

定理 7.4 の証明

n に関する帰納法による。$n=2$ のとき (2) が成り立つのは明らかである。$n=k$ のとき (2) が成り立つと仮定する。二項定理に続いて帰納法の仮定を用いて、

$$\begin{aligned}
(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^m &= ((a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1})^m \\
&= \sum_{\alpha+\beta=m} \frac{m!}{\alpha!\beta!} (a_1+a_2+\cdots+a_k)^\alpha a_{k+1}^\beta \\
&= \sum_{\alpha+\beta=m} \frac{m!}{\alpha!\beta!} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=\alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!} a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_k^{\alpha_k}a_{k+1}^\beta \\
&= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\beta=m} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!\beta!} a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_k^{\alpha_k}a_{k+1}^\beta.
\end{aligned}$$

これは $n=k+1$ のときに (2) が成り立つことを示している。ゆえに (2) は、2 以上の任意の自然数に対して成立する。■

7.5 多変数版 Taylor の定理

記述を簡単にするため、

$$(d^m f)_x(h) := \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_m\le n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}(x) h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_m} \tag{3}$$

とおく[3]。これを、f の x における m **次微分**と呼ぶ。これは h に関する m 次同次多項式 (m **次形式**) である。

(少し先走っておくと) $m=1,2$ のときが重要である。$m=1$ のとき、$(d^1 f)_a(h) = f'(a)h$. $m=2$ のとき、$(d^2 f)_a(h)$ は後で定義する f の a における Hesse 行列 $H(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$ を係数とする 2 次形式 $(H(a)h, h) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_i h_j$ である。

これは桂田が発明した記号というわけではなくて、某テキストにあった記号だが、あまりメジャーな記号ではない (誰でも分かる記号ではない)。

補題 7.5 Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合, $k\in\mathbf{N}$, $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ は C^k 級, $a\in\Omega$, $h\in\mathbf{R}^n$, $[a,a+h]\subset\Omega$ とするとき、

$$F(t) := f(a+th) \quad (t\in[0,1])$$

とおくと、$F\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ は C^k 級で、$\forall m\in\{1,\dots,k\}$ に対して、

$$F^{(m)}(t) = (d^m f)_{a+th}(h).$$

証明 m に関する帰納法を用いる。$m=1$ に対しては、chain rule から

$$\begin{aligned}
F^{(1)}(t) = F'(t) = \frac{d}{dt}f(a+th) &= f'(a+th)\frac{d}{dt}(a+th) = f'(a+th)h \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i.
\end{aligned}$$

[3] このあたりは標準的な記号がない。ここで紹介した記号はいくつかの教科書に載っているものではあるが、誰でも分かるとは限らない。この講義だけの記号と思っておいた方が良い。

これは $\displaystyle\sum_{1\le i_1\le n}\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a+th)h_{i_1}$ と書き直せる。ゆえに $m=1$ のとき成立する。

m のとき成立する、すなわち

$$F^{(m)}(t)=\sum_{1\le i_1,i_2,\dots,i_m\le n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}(a+th)h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_m}$$

と仮定すると、

$$\begin{aligned}F^{(m+1)}(t)=\frac{d}{dt}F^{(m)}(t)&=\sum_{1\le i_1,i_2,\dots,i_m\le n}\frac{d}{dt}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}(a+th)h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_m}\\&=\sum_{1\le i_1,i_2,\dots,i_m\le n}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_i\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}(a+th)h_i\right)h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_m}\\&=\sum_{1\le i_1,i_2,\dots,i_m,i_{m+1}\le n}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}\partial x_{i_{m+1}}}(a+th)h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_m}h_{i_{m+1}}.\end{aligned}$$

これは $m+1$ のときも成立することを示す。ゆえにすべての $m(\le k)$ について成立する。■

定理 7.6 (多変数の Taylor の定理) $n,k\in\mathbf{N}$, Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ を C^k 級の関数、$a\in\Omega$, $h\in\mathbf{R}^n$, 線分 $[a,a+h]\subset\Omega$ とするとき、次の式を満たすような $0<\theta<1$ が存在する:

$$f(a+h)=\sum_{m=0}^{k-1}\frac{1}{m!}\left(d^m f\right)_a(h)+\frac{1}{k!}\left(d^k f\right)_{a+\theta h}(h).$$

(念のため枠内に再度書いておく) ここで $\left(d^m f\right)_x(h)$ は、f の x における m 次微分と呼ばれる、h についての m 次形式で、次の式で定められる。

$$\left(d^m f\right)_x(h):=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_m\le n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}(x)h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_m}.$$

証明　補題 7.5 より、$F(t):=f(a+th)$ は $[0,1]$ で C^k 級で、

$$F^{(m)}(t)=(d^m f)_{a+th}(h)\quad(0\le m\le k).$$

1 変数関数についての Taylor の定理から、$\exists\theta\in(0,1)$ s.t.

$$F(1)=\sum_{m=0}^{k-1}\frac{F^{(m)}(0)}{m!}\cdot 1^m+\frac{1}{k!}F^{(k)}(\theta)\cdot 1^k$$

後は代入するだけで結論を得る。■

m **次微分の同類項の整理**　偏微分係数は偏微分の順序によらないのだから、$(d^m f)_x(h)$ の $\sum$ には同類項が含まれている。それをまとめると

$$\begin{aligned}\left(d^m f\right)_x(h)&=\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_m\le n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}(x)h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_m}\\&=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(x)\\&=\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\ \text{は非負整数}\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=m}}\frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(x)\,h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\cdots h_n^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

となる。ただし、ここでは二項定理

$$(a+b)^m = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} a^r b^{m-r} = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!(m-r)!} a^r b^{m-r}$$

を一般化した**多項定理**[4]

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^m = \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_m\le n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m} = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=m \\ \alpha_j \text{ は非負整数}}} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} {a_1}^{\alpha_1}{a_2}^{\alpha_2}\cdots{a_n}^{\alpha_n}$$

を用いて、多少形式的な[5]計算を行なった (証明したとは言えません)。

例えば 2 変数関数 f の 2 次微分については、既に示したように、

$$\begin{aligned}(d^2f)_a(h) &= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_ih_j \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a)h_1h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)h_2h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a)h_2h_2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)h_2^2.\end{aligned}$$

例 7.7 (荷見 [1] から) $f(x,y)$ は C^2 級で、$f(0,0)=1$, $f_x(0,0)=0.5$, $f_y(0,0)=0.1$ であり、さらに原点と点 $P=(0.1,0.2)$ を結ぶ線分上で

$$|f_{xx}(x,y)| \le 0.02, \quad |f_{xy}(x,y)| \le 0.05, \quad |f_{yy}(x,y)| \le 0.05$$

が成り立つとき、$f(P)$ を評価せよ (1 次近似で値を求め、Taylor の定理で誤差を評価せよ)。
(解答) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ (ただし $\boldsymbol{a}=(a,b)$, $\boldsymbol{h}=(h,k)$) を端点とする線分が f の定義域に含まれるならば、Taylor の定理から、$\exists\theta\in(0,1)$ s.t.

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{a}) + f_x(\boldsymbol{a})h + f_y(\boldsymbol{a})k \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})h^2 + 2f_{xy}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})hk + f_{xx}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})k^2\right).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}&|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - (f(\boldsymbol{a}) + f_x(\boldsymbol{a})h + f_y(\boldsymbol{a})k)| \\ &\quad \le \frac{1}{2}\left(\max_{t\in[0,1]}|f_{xx}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})|h^2 + 2\max_{t\in[0,1]}|f_{xy}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})|hk + \max_{t\in[0,1]}|f_{yy}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})|k^2\right).\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}=(0,0)$, $\boldsymbol{h}=(0.1,0.2)$ として用いると、

$$f(\boldsymbol{a}) + f_x(\boldsymbol{a})h + f_y(\boldsymbol{a})k = f(0,0) + f_x(0,0)0.2 + f_y(0,0)0.2 = 1 + 0.5\times 0.1 + 0.1\times 0.2 = 1.07,$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\max_{t\in[0,1]}|f_{xx}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})|h^2 + 2\max_{t\in[0,1]}|f_{xy}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})|hk + \max_{t\in[0,1]}|f_{yy}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})|k^2\right) \\ &\qquad \le \frac{1}{2}(0.02\times 0.1^2 + 2\times 0.05\times 0.1\times 0.2 + 0.05\times 0.2^2) = 0.0021.\end{aligned}$$

ゆえに

$$|f(0.1,0.2) - 1.07| \le 0.0021.$$

これから $1.07 - 0.0021 \le f(0.1,0.2) \le 1.07 + 0.0021$ であるから、

$$1.0679 \le f(0.1,0.2) \le 1.0721.\blacksquare$$

[4] 二項定理を認めれば、後は n に関する帰納法で簡単に証明できる。

[5] これを正当化することは可能である。$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ は数ではないが、多項定理の証明に使うような数の性質は満足していることを示すのは難しくはない。

8 極値問題

8.1 まずは問題から

K を $\mathbf{R}^2$ 内の 3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形とする: $K=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$. $f\colon K\to\mathbf{R}$ を

$$f(x,y)=3x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$$

で定めるとき、f の最大値、f の最小値を求めよ。

とりあえず微分してみましょう。

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x+2y-2 & 4y+2x-2\end{pmatrix}.$$

これから

$$f'(x,y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right).$$

さて、ここからどうしたら良いか？1 変数関数の場合のような増減表は書けない。そもそも f' の符号を調べるというのが、どう多変数関数に拡張したら良いか分からない ($f'(x,y)$ はベクトルなので)。

しかし、すぐ後で証明するように

> f が定義域の内点 a で極大 (or 極小) ならば $f'(a)=0$

は多変数関数でも成立する。

また

> $f'(a)=0$, a の十分近くで $f''>0 \Longrightarrow f$ は a で極小

は多変数関数への拡張が出来る (今回、定理を紹介する)。

8.2 内点 a で極値を取れば $f'(a)=0$

まず極値を定義しないと話が始まりません。

> **定義 8.1 (極大, 極小)** $A\subset\mathbf{R}^n$, $f\colon A\to\mathbf{R}$, $a\in A$ とするとき、f が a で極大とは、
>
> $$\exists\varepsilon>0\quad\text{s.t.}\quad f(a)=\max_{x\in A\cap B(a;\varepsilon)}f(x)=\max_{\substack{x\in A\\ \|x-a\|<\varepsilon}}f(x)$$
>
> が成り立つことをいう。また f が a で狭義の極大とは、
>
> $$\exists\varepsilon>0\quad\text{s.t.}\quad (\forall x\in A:0<\|x-a\|<\varepsilon)\quad f(a)>f(x)$$
>
> が成り立つことをいう。「極小」「狭義の極小」も同様である。

注意 8.2 内点でしか極値を考えないという立場もある。後の条件付き極値問題とのからみで上のような定義を採用した。上の定理は、どちらの流儀でも考えても良い (開集合に属する点は、すべて内点なので)。 ■

定理 8.3 (微分可能な関数が内点で極値を取れば微分は 0) Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は全微分可能で、$a \in \Omega$, f は a で極大 (or 極小) ならば、$f'(a) = 0$ (これは $\nabla f(a) = 0$ とも書ける).

証明 Ω が開集合であるから、$\exists r > 0$ s.t. $B(a; r) \subset \Omega$. 各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して、

$$\varphi_i\colon (a_i - r, a_i + r) \ni x_i \mapsto f\left(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\right) \in \mathbf{R}$$

を考えると、これは $x_i = a_i$ で極大値を取る。ゆえに

$$0 = \varphi_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

これが任意の i について成り立つから、

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = (0 \cdots 0) = 0.\blacksquare$$

幾何学的考察 この定理を図形的に考えてみよう。一般に関数 f のグラフ $z = f(\vec{x})$ の $\vec{x} = \vec{a}$ における接超平面は、

$$z = f'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + f(\vec{a})$$

であった。$n = 2$ の場合、

$$z = f'(a, b)\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + f(a, b)$$

となるが、$f'(a, b) = 0$ であれば、

$$z = f(a, b).$$

これは xy 平面に水平な平面である。 $\blacksquare$

上の定理の逆は成り立たない。すなわち $f'(a) = 0$ であっても、f が a で極値を取らないということがありうる。これは 1 変数関数でもそうである。(反例: $f(x) = x^3$, $a = 0$ とすると、$f'(a) = 0$ であるが、f は a で極大でも極小でもない。)

8.3 極値問題の定理

Taylor の定理を $k = 2$ で用いる。f が C^2 級ならば、十分小さい $\forall h \neq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + \left(d^2 f\right)_a (h) + \frac{1}{2!}\left(d^2 f\right)_{a+\theta h}(h) \\ &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta h) h_i h_j. \end{aligned}$$

$f'(a) = 0$ とすると、$f'(a)h = 0$ なので

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta h) h_i h_j.$$

$\|h\|$ が小さいとき、右辺第 2 項は「大体」 h の 2 次式なので (かなり乱暴な議論だけれど)、符号が一定になる場合がある。

$$\exists\varepsilon>0\quad(\forall h:0<\|h\|<\varepsilon)\quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+\theta h)h_ih_j>0 \quad\Longrightarrow\quad f \text{ は } a \text{ で極小},$$

$$\exists\varepsilon>0\quad(\forall h:0<\|h\|<\varepsilon)\quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+\theta h)h_ih_j<0 \quad\Longrightarrow\quad f \text{ は } a \text{ で極大}.$$

定義 8.4 (Hesse 行列) C^2 級の関数 f に対して、

$$H(x):=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)$$

とおき、これを f の x における **Hesse 行列**と呼ぶ。

Hesse 行列は実対称行列である。これを使うと、上の式は

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}\left(H(a+\theta h)h,h\right)=f(a)+\frac{1}{2}\left(H(a+\theta h)h,h\right)$$

と書ける。ポイントは

$$\left(d^2f\right)_x(h)=(H(x)h,h),$$

すなわち 2 次の微分が Hesse 行列を係数とする 2 次形式になることである。

次の定理がこの節のメインである。

定理 8.5 (Hesse 行列の符号による極値の判定) Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ が C^2 級, $a\in\Omega$, $f'(a)=0$, $H(a):=f$ の a における Hesse 行列 とするとき、次の (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i) $H(a)$ が正値 $\Longrightarrow$ f は a で狭義の極小となる。

(ii) $H(a)$ が負値 $\Longrightarrow$ f は a で狭義の極大となる。

(iii) $H(a)$ が不定符号 $\Longrightarrow$ f は a で極値を取らない。

注意 8.6 正値でも負値でも不定符号でもない場合がある (次項で述べる)。そういう場合は、もっと詳しく調べないと判定できない。 ■

8.4 実対称行列の正値性、負値性

定義 8.7 $A=(a_{ij})$ を n 次実対称行列とする。

(i) A が正値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて正。

(ii) A が負値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて負。

(iii) A が不定符号 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値に正のもの、負のものがある。

参考文献

[1] 荷見守助：現代解析の基礎演習, 内田老鶴圃 (1993).