多変数の微分積分学1 演習問題 (Part 3)

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2013 年 7 月 8 日

Taylor の定理

(具体的に与えられる多変数関数は、1 変数関数から組み立てられるものが多いので[1]、多変数関数の Taylor の定理を本質的に用いる場合はあまり多くない。理論的な内容 (例えば極値問題に関する命題の証明) に用いるのが、重要となる。)

121. 二項定理を証明せよ (高校数学の復習)。

122. C^∞ 級の 2 変数関数 $f(x,y)$ ($(x,y)\in\mathbf{R}^2$) と、$(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $(h,k)\in\mathbf{R}^2$ があるとき、

$$F(t) := f(a+th, b+tk) \quad (t\in\mathbf{R})$$

とおくとき、次の (1), (2) に答えよ[2]。 ——— 合成関数の微分法で、Taylor の定理の準備

(1) $F'(t)$, $F''(t)$, $\ldots$ を (微分の階数の低い方からいくつか) 計算せよ。

(2) $F^{(m)}(t)$ ($m\in\mathbf{N}$) の公式を推測し、数学的帰納法で証明せよ。

[1] これは 1 変数関数から組み立てられる多変数関数しか登場しないという意味ではない。1 変数関数から組み立てられない多変数関数は応用上頻出するが、そういう関数は、「知っている」関数を用いて具体的に表すことは出来ない、ということである。

[2] (授業でやるけれど) n 変数関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ について、$F(t) := f(a_1+th_1, a_2+th_2, \cdots, a_n+th_n)$ とおき、上と同様のことを行なってみよう。

解答　(1)

$$F'(t) = f_x x_t + f_y y_t = f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k,$$

簡単のため、$c := (a+th, b+tk)$ とおく。f が C^2 級であることから、$f_{xy} = f_{yx}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} F''(t) &= \left(f_{xx}(c)h + f_{xy}(c)k\right)h + \left(f_{yx}(c)h + f_{yy}(c)k\right)k \\ &= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + 2f_{xy}(a+th, b+tk)hk + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2, \end{aligned}$$

f が C^3 級であることから、$f_{xxy} = f_{xyx}$, $f_{xyy} = f_{yyx}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} F''(t) &= \left(f_{xxx}(c)h + f_{xxy}(c)k\right)h^2 + 2\left(f_{xyx}(c)h + f_{xyy}(c)k\right)hk + \left(f_{yyx}(c)h + f_{yyy}(c)k\right)y^2 \\ &= f_{xxx}(c)h^3 + 3f_{xxy}(c)h^2k + 3f_{xyy}(c)hk^2 + f_{yyy}(c)k^3. \end{aligned}$$

(2) $m = 1, 2, 3$ での結果から

$$F^{(m)}(t) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{\partial^m f}{\partial x^r \partial y^{m-r}}(a+th, b+tk)h^r k^{m-r} \qquad (\heartsuit)$$

と推測される。$m = n$ のとき $(\heartsuit)$ が成立したと仮定すると、chain rule と $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ から、

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(t) &= \frac{d}{dt}F^{(n)}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^n f}{\partial x^r \partial y^{n-r}}(a+th, b+tk)h^r k^{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{r+1}\partial y^{n-r}}(c)h + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n-r+1}}(c)k\right)h^r k^{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{r+1}\partial y^{n+1-(r+1)}}(c)h^{r+1}k^{n+1-(r+1)} + \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} \\ &= \sum_{r'=1}^{n+1}\binom{n}{r'-1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{r'}\partial y^{n+1-r'}}(c)h^{r'}k^{n+1-r'} + \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} \\ &= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(c)h^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\left(\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right)\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(c)k^{n+1} \\ &= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(c)h^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(c)k^{n+1} \\ &= \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(a+th, b+tk)h^r k^{n+1-r}. \end{aligned}$$

これは $m=n+1$ のときも $(\heartsuit)$ が成り立つことを示している。ゆえに帰納法により、$(\heartsuit)$ は任意の $m\in\mathbf{N}$ に対して成り立つ。 ■

123. C^∞ 級の $f\colon \mathbf{R}^3\ni(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)\in\mathbf{R}$ と、$\vec{a}=(a,b,c)$, $\vec{h}=(p,q,r)\in\mathbf{R}^3$ に対して

$$F(t):=f(\vec{a}+t\vec{h})=f(a+tp,b+tq,c+tr)\quad(t\in\mathbf{R})$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) $F'(t)$, $F''(t)$ を計算せよ (f を使って表せ)。

(2) 自然数 m に対して $F^{(m)}(t)$ を f を用いて表す式を推定し、帰納法を用いて証明せよ。

124. $n,m\in\mathbf{N}$ に対して

$$(a_1+\cdots+a_n)^m=\sum_{1\le i_1,\cdots,i_m\le n}a_{i_1}\cdots a_{i_m}=\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\ \text{は非負整数}\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=m}}\frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}$$

が成り立つことを証明せよ (**多項定理**, multinomial theorem)。

125. $n,k\in\Omega$, Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ が C^k 級, $[a,a+h]:=\{a+th;t\in[0,1]\}\subset\Omega$ とするとき、$F(t):=f(a+th)$ $(t\in[0,1])$ とおくと、F は C^k 級で、$\forall m\in\{1,\ldots,k\}$, $\forall t\in[0,1]$ に対して、

$$\begin{aligned}F^{(m)}(t)&=\sum_{1\le i_1,\ldots,i_m\le n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}(a+th)h_{i_1}\cdots h_{i_m}\\&=\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\ \text{は非負整数}\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=m}}\frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\ \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(a+th)h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ (この事実は授業で証明するけれど、要するにただの高階微分の計算であり、これくらいは自力で出来るのが望ましい)。

126. 以下の関数を $(0,0)$ において 4 階の項 (x, y の 4 次式のところ) まで Taylor 展開せよ (剰余項は求めなくて良い)。

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

127. (1) $n \in \mathbf{N}$ に対して $f(t) = \log(1+t)$ の n 階導関数を求め、$f(t)$ を $t=0$ において Taylor 展開せよ。(2) $g(x) = \log(1+x^2)$ を $x=0$ において展開せよ。(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - x\sin x}{x^4}$ を求めよ。

128. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x+y^2}$ で定まる関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ について、以下の問に答えよ。
(1) f の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ。(2) Taylor の定理を用いて、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - P(x,y)|}{x^2+y^2} = 0$$

を満たす多項式 $P(x,y)$ のうちで次数最低のものを求めよ。

129. $\sqrt{(3.01)^2 + (4.02)^2}$ を小数第 4 位まで正しく求めよ。

行列の符号

130. 次の実対称行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
(6) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

解答

(1) 対角行列だから、固有値は対角成分の 1, 1. ともに正だから正値である。

(2) 対角行列だから、固有値は対角成分の -1, -2. ともに負だから負値である。

(3) 対角行列だから、固有値は対角成分の 3, -1. 正と負だから、不定符号である。

(4) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) - (-3)(-3) = \lambda^2 - 3\lambda - 7$ であり、固有値は $\dfrac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$ である。

正と負だから不定符号である。あるいは

$$\det A_1 = A_1 = 2 > 0, \quad \det A_2 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3^2 = -7 < 0$$

を見て、$\det A < 0$ であるから、不定符号である。

(5) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 - 2^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$ であり、固有値は $1, 5$ である。共に正であるから正値である。あるいは

$$\det A_1 = A_1 = 3 > 0, \quad \det A_2 = \det A = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5 > 0$$

であるから、A は正値である。

(6) (これは前問の行列の -1 倍だから、負値である。) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 - 2^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = (\lambda + 1)(\lambda + 5)$ であり、固有値は $-1, -5$ である。共に負であるから負値である。あるいは

$$\det A_1 = A_1 = -3 < 0, \quad \det A_2 = \det A = (-3)^2 - (-2)^2 = 5 > 0$$

であるから、$(-1)^k \det A_k > 0$ $(\forall k)$ を満たしているので、A は負値である。

(7) これは対角行列なので、固有値は対角成分で、2, 0. 正でない固有値 (0) があるので正値ではなく、負でない固有値 (2, 0) があるの負値ではなく、正と負両方の固有値があるわけでないので (負の固有値がない) 不定符号ではない。

(8) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1) - 2^2 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$ であり、固有値は $0, 5$ である。固有値に 0 あるので、正値でも負値でもない。また正の固有値はあるが、負の固有値はないので、不定符号でもない。あるいは、

$$\det A = 4 \cdot 1 - 2^2 = 0$$

から固有値に 0 があることが分かり、正値でも負値でもないことが分かる。2 次の正方行列の場合、もし不定符号であれば $\det A < 0$ であり、これは $\det A = 0$ に反するから、不定符号でないことも分かる。

(9) これは対角行列なので、固有値は対角成分で、0, 0. 正でない固有値があるので正値ではなく、負でない固有値があるので負値ではなく、正と負両方の固有値があるわけでないので不定符号ではない。

131. a を 0 でない実対称行列とするとき、$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ は不定符号であることを示せ。

解答 $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a \\ -a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = (\lambda - a)(\lambda + a)$ であるから、A の固有値は a と $-a$ である。$a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ であるから、a と $-a$ は異符号である。ゆえに A は不定符号である。

132. 次の実対称行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(4) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
(5) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

解答

(1) 対角行列だから、固有値は対角成分の 1, 2, 3. みな正だから正値である。

(2) 対角行列だから、固有値は対角成分の 1, −2, 3. 正の固有値と負の固有値があるので不定符号である。

(3) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ とブロック分けでき、対角線上にあるブロック以外はすべて 0 である。ゆえに対角線上にあるブロックの固有値を調べればよい。$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ は

既に見たように正値である。右下のブロックの固有値は1でこれも正である。ゆえに正値である。

問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$ $(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)((\lambda-3)^2-2^2) = (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5) =$ $(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda-1) = (\lambda-1)^2(\lambda-5)$ であり、固有値は 1, 1, 5 である。すべて正であるから正値である。

あるいは、

$$\det A_1 = 3 > 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5,$$
$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot 1 = 5 > 0$$

であるから、$\det A_k > 0$ $(\forall k)$ が成り立っていて、正値であることが分かる。

(4) これもブロック分けすると、固有値は、$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と、-3 を合わせたものだと分かる。A_2 は負値であるので (省略)、問題の行列の固有値はすべて負であることが分かり、負値である。

問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} =$ $(\lambda+3)\begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+3)((\lambda+3)^2-2^2) = (\lambda+3)(\lambda^2+6\lambda+5) =$ $(\lambda+3)(\lambda+5)(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5)$ であり、固有値は -1, -3, -5 である。すべて負であるから負値である。

あるいは

$$\det A_1 = -3 < 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3)^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 > 0,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot (-3) = 5 \cdot (-3) = -15 < 0$$

であり、$\det A_k$ $(k = 1, 2, 3)$ の符号は $-, +, -$ と、$(-1)^k \det A_k > 0$ $(\forall k)$ が成り立っているので、負値であることが分かる。

(5) 問題の行列を A とおくと、特性多項式は $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 4 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} =$ $(\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(2+1)}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)\left((\lambda - 4)^2 - (-1)^2\right) -$ $(\lambda - 4) = (\lambda - 4)\left(\lambda^2 - 8\lambda + 14\right)$ であり、固有値は $4, 4 \pm \sqrt{2}$ である。すべて正であるから正値である。

あるいは

$$\det A_1 = 4 > 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4^2 - 1^2 = 15 > 0,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 64 - 4 - 4 = 56 > 0$$

であり、$\det A_k > 0$ $(\forall k)$ が成り立っているので、A は正値であることが分かる。

(6) 与えられた行列を A とする。A は対角行列であるので、A の固有値は対角成分である $1, -2, 0$. 正の固有値と負の固有値、両方存在するので、A は不定符号である。

(7) 与えられた行列を A とする。$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 2\lambda + 24$ で、これはいわゆる不還元の場合で、Cardano の公式を用いて解いても、虚数の 3 乗根が現れる。

$$\det A_1 = 1 > 0, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2 < 0, \quad \det A_3 = \cdots = -24 < 0$$

であるから、$\det A_k$ $(k=1,2,3)$ の符号は $+,+.+$ でも $-,+,-$ でもないので、A は正値でも負値でもない。また $\det A = -24 \neq 0$ であるから、A は 0 を固有値に持たない。ゆえに A は不定符号である。■

少し真剣にアルゴリズムの追求

固有値計算作戦　固有多項式 $\varphi(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ を計算して、その根を求める。$n=2$ のときは 2 次方程式の解の公式で計算可能であるが、$n \geq 3$ になると困難になる。$n=3$ であっても、いわゆる不還元の場合には、解が虚数の 3 乗根を含む形で表されることになり面倒である (もちろん、固有多項式は 3 次式なので微積分を使えば処理できる)。n が大きくなると、急激に困難さが増す。

首座小行列式作戦　$k=1,2,\cdots$ に対して、$\det A_k$ (A_k は A の k 次首座小行列) を計算して符号を調べる。

(i) すべて正である $(\forall k \in \{1,\cdots,n\}\ \det A_k > 0)$ ことは、A が正値であるための必要十分条件である。

(ii) 負から始まり、負と正が交互に現れる $(\forall k \in \{1,\cdots,n\}\ (-1)^k \det A_k > 0)$ ことは、A が負値であるための必要十分条件である。

(iii) 上の (i), (ii) のいずれでもない場合、$\det A$ を計算する。もし $\det A \neq 0$ であるならば、A は不定符号である。$\det A = 0$ のときは、一般には面倒だが、

(a) $n=2$ の場合は、正値、負値、不定符号のいずれでもないと結論できる ($\det A < 0 \iff A$ は不定符号)。

(b) また $n=3$ の場合は、固有多項式が容易に因数分解可能で、符号の判定は容易である。結論だけ書いておくと

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

が $\det A = 0$ を満たすとき、

$$\lambda_1\lambda_2 = -b^2 - c^2 - e - 2 + ad + af + df$$

が負ならば不定符号、そうでないならば正値でも負値でも不定符号

でもない。

(c) $n \geq 4$ の場合は ??

Gaussの消去法作戦　A の対角線から下を掃き出す。A が正値であれば、対角線に非零要素は現れず、行交換なしに最後まで上三角化が進められて、対角線に正数が並ぶはずである。一方、A が負値であれば、対角線に非零要素は現れず、行交換なしに最後まで上三角化が進められて、対角線に負数が並ぶはずである。そのいずれでもない場合 (ここまでで正値でもないし、負値でもないことが判明しているので、残るは不定符号かどうかだけである)、必要ならば行交換を施して計算を進めて A の行列式を計算する (行交換を全部で r 回した場合、最終的には対角成分の積 $\times(-1)^r = \det A$ である)。$\det A \neq 0$ ならば、A は 0 を固有値に持たず、正値でも負値でもないので、($n \geq 2$ であれば) A は実は不定符号であることが分かる。$\det A = 0$ の場合は少々難しいが、シフトしてみるなどして、「何とかなる」場合が多いであろう。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の場合、行交換なしに

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

となるので、いわゆる符号は $(1,2)$ (負の固有値が 1 個, 正の固有値は 2 個) で、不定符号である。

$p(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ の根は

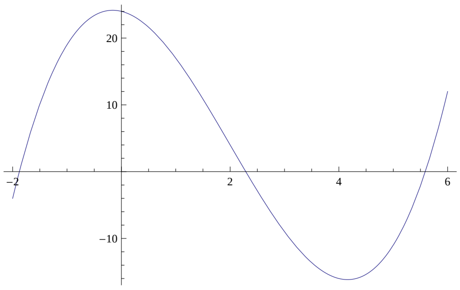
$$\lambda = \frac{1}{3}\left(6 + \frac{7\ 6^{2/3}}{\sqrt[3]{-9+i\sqrt{1977}}} + \sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977}+9i\right)}\right),$$
$$2 - \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{-9+i\sqrt{1977}}}{6^{2/3}} + \frac{-7+7i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977}+9i\right)}},$$
$$2 + \frac{i\left(\sqrt{3}+i\right)\sqrt[3]{-9+i\sqrt{1977}}}{6^{2/3}} + \frac{-7-7i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6i\left(\sqrt{1977}+9i\right)}}.$$

分かりづらいけれど、これらは (A が実対称行列なのでもちろん) いずれも実

数で

$$\lambda \fallingdotseq 5.580664\cdots, 2.2874\cdots, -1.877074\cdots.$$

p のグラフは次のようになる。



(この図が分かってしまえば、$p(-1)<0$, $p(0)>0$, $p(4)<0$ を調べて、A は負の固有値を 1 個、正の固有値を 2 個持つことは簡単に証明できる。)

極値問題

133. $a,b,c,p,q,r\in\mathbf{R}$, $a>0$, $b^2-4ac<0$ とするとき、$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+px+qy+r$ の最小値を (a) 平方完成, (b) 多変数関数の微分法, 二つの方法で求めよ。

(a)

$$f(x,y)=a\left(x+\frac{by+p}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\left(y+\frac{2aq-bp}{4ac-b^2}\right)^2+\frac{cp^2+aq^2-bpq}{b^2-4ac}+r.$$

(b) $f'(x,y)=\begin{pmatrix}2ax+by+p\\2cy+bx+q\end{pmatrix}$, $H(x,y)=\begin{pmatrix}2a&b\\b&2c\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}2a&b\\b&2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-p\\-q\end{pmatrix}$$

から

$$f\left(\frac{2cp-bq}{b^2-4ac},\frac{2aq-bp}{b^2-4ac}\right)=\frac{cp^2-bpq+aq^2}{b^2-4ac}+r.$$

134. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された C^1 級の関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ が、$a\in\Omega$ で $\nabla f(a)\neq 0$ を満たすならば、点 a から $\nabla f(a)$ の方向に (少しだけ) 進むとき f は増加することを示せ。

例題 B　$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy-zx-z$ について、以下の問に答えよ。(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

例題 B の略解　$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-y-z \\ 2y-x \\ 2z-x-1 \end{pmatrix} = 0$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$. この点における Hesse 行列は $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ で、これは正定値。ゆえに極小点で、極小値は $f(1/2,1/4,3/4) = -3/8$. ■

例題 C　$f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$ について、前問と同じ問に答えよ。

例題 C の略解　まず $f_x = 4(x^3-x+y)$, $f_y = 4(y^3+x-y)$ より $\nabla f = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. このうち $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ のときは極小で、極小値 -8. $(x,y)=(0,0)$ のときは、Hesse 行列が特異である。ちょっと考えると極値でないことが分かる。 ■

135.　関数 $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ について、以下の問に答えよ。(1) ∇f を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) $\nabla f(x,y) = 0$ となる点 (x,y) を求めよ。 (4) f の極値を求めよ。

解答

$$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$$

$$f_x = y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}, \quad f_y = x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

(1) $\nabla f = \begin{pmatrix} y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} \\ x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$.

(2)

$$H(x,y) = e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} -2xy(3-2x^2) & (1-2x^2)(1-2y^2) \\ (1-2x^2)(1-2y^2) & -2xy(3-2y^2) \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\nabla f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ \text{and} \\ x(1-2y^2) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \quad \text{or} \quad x = \pm\sqrt{1/2} \\ \text{and} \\ x = 0 \quad \text{or} \quad y = \pm\sqrt{1/2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), \left(\pm\sqrt{1/2}, \pm\sqrt{1/2}\right) \quad \text{(複号任意)}■$$

136. $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

137. $f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

練習問題 次の関数の極大と極小を求めよ。
(1) $x^2+xy-4x+y^2-2y$. (2) $x^2-8xy+18y^2+6x-28y$. (3) $(x-y^2)(x-2y^2)$.
(4) $xy(x^2+y^2-1)$. (5) $x^4+y^4+2x^2y^2$ (6) $xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$. (7) x^3+y^3.

138. $K=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$ とおき、$f\colon K\to\mathbf{R}$ を $f(x,y)=3x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$ で定義するとき、f の最大値と最小値を求めよ。

略解

- K は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合なのでコンパクトであるから、連続関数 f は K 上で最大値、最小値を持つ。
- K の内点で極値を持つならば、そこで $\nabla f=0$ となる。$\nabla f(x,y)=0$ となる (x,y) を探すと、($\mathbf{R}^2$ 全体で極値を探しても唯一つ) $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ で、$f\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{2}{5}$ (極小値).
- K の境界 ∂K は、$B_1=\{(x,0); x\in[0,1]\}$, $B_2=\{(0,y); y\in[0,1]\}$, $B_3=\{(x,1-x); x\in[0,1]\}$ からなる。B_1, B_2, B_3 での最大値はそれぞれ、2, 1, 2 で、$\max_{\partial K} f=2$. B_1, B_2, B_3 での最小値はそれぞれ、$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$ で、$\min_{\partial K} f=\dfrac{1}{2}$.

以上から K における最大値は 2, 最小値は $\dfrac{2}{5}$. ■

139. $f(x,y):=2x^3+xy+4x^2+y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の (x,y) における Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。 (4) (3) で求めた極値は、最大値でも最小値でもないことを示せ。

解答　(1), (2), (3) $f(x,y)=2x^3+xy+4x^2+y^2$ より、

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x^2+y+8x \\ x+2y \end{pmatrix},\quad H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x+8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 6x^2+y+8x=0 \quad \wedge \quad x+2y=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=-2y \quad \wedge \quad 6(-2y)^2+y+8(-2y)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (y=0 \quad \vee \quad y=\frac{5}{8}) \quad \wedge \quad x=-2y \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y)=(0,0),(-\frac{5}{4},\frac{5}{8}).\end{aligned}$$

$H(0,0)=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は、$\lambda^2-10\lambda+15$. 固有値は $5\pm\sqrt{5^2-1\cdot 15}=5\pm\sqrt{10}$ で、これは両方とも正なので、$H(0,0)$ は正値である。ゆえに f は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=0$ を取る。

$H\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{8}\right)=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は、$\lambda^2+5\lambda-15=0$. 固有値は $\lambda=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2+4\cdot 1\cdot 15}}{2}=\dfrac{-5\pm 4\sqrt{5}}{2}$ で、これは正負両方あるので、$H\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{8}\right)$ は不定符号である。ゆえに f は $\left(-\frac{5}{4},\frac{5}{8}\right)$ で極値を取らない。

(4) $f(x,0)=x^3+x^2$ は、いくらでも大きな値、いくらでも小さな値を取ることは明らかである ($\lim_{x\to\infty}(x^3+x^2)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2)=-\infty$ であるから)。ゆえに f は最大値、最小値を持たない。 ■

140.　$f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を $f(x,y)=x^2-2xy^2+2y^2$ で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) f のグラフ $z=f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式を求めよ。
(2) $\nabla f(x,y)=0$ となる点 (x,y) を求めよ。(3) f の点 (x,y) における Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(4) f の極値を求めよ。

解答　(1) $\nabla f(x,y)={}^t(2x-2y^2,4y-4xy)$ であるから、接平面の公式 $z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$ に代入して

$$z-(a^2-2ab^2+2b^2)=(2a-2b^2)(x-a)+(4b-4ab)(y-b).$$

整理して

$$z = 2(a-b^2)x + 4b(1-a)y - a^2 - 2b^2 + 4ab^2.$$

(2) $(0,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ の 3 点。(3) $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & 4(1-x) \end{pmatrix}$. (4) $(x,y) = (0,0)$ で極小値 0. ■

141. $\mathbf{R}^2$ を定義域とする関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ について以下の問に答えよ。(1) f のグラフ $z = f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における接平面の方程式を求めよ。(2) $\nabla f(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めよ。(3) f の極値をすべて求めよ。

解答

(1) 答は $z = -3x - 3y$. 解き方としては、接線の方程式 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ の 2 次元版である

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

という公式に $(a,b) = (0,0)$ を代入するというのが一つ。もう一つは

$$F(x,y,z) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x,y) - z$$

とおいて、

$$F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

という公式に $(a,b) = (0,0)$, $c = f(a,b) = f(0,0) = 0$ を代入するというもの。

目立った間違い: 1 次式でない答 (2 次式とか3 次式) を書いた人が結構いたが、それは平面内の直線の方程式を求めろと言う問題の解答に 3 次式を書くようなものである。

(2) $(x,y) = (1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. これはさすがに大半の人が出来ていたが、これを $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$ と書くのは曖昧である (複号任意なのか、複号同順なのかによって、2 点になるか 4 点になるか変わってしまうので)。

(3) 行列の正値、負値の判定ができない人が多かった。この問題の場合、Hesse 行列は対角行列なので、対角成分が固有値そのものであることに気が付けば (あるいは講義で強調したように、2 次の正方行列は 2 次方程式を解くだけで固有値が求まるのだから、それを実行しても良い)、定義から即答できるはずである。

$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ は正値、$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ は不定符号、$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ は負値。ゆえに $(1,1)$ では極小値 $f(1,1)=-4$、$(-1,-1)$ では極大値 $f(-1,-1)=4$ を取る。

142.　関数 $f(x,y)=x^4+y^4-2(x^2+y^2)$ について以下の問に答えよ。
(1) f の極値を求めよ。(2) f のすべての極値点を含む範囲で等高線を描け (概形でよい)。

解答　(最後の等高線は略 – 紙の節約)。まず grad と Hesse 行列は

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x(x^2-1) \\ 4y(y^2-1) \end{pmatrix}, \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2-1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) \end{pmatrix}.$$

$\nabla f(x,y)=0$ を解くと、

$$(x,y)=(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1).$$

- $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ (複号任意) のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ であり、これは明らかに正値であるから、極小となる。極小値 $f(\pm1,\pm1)=-2$.
- $(x,y)=(\pm1,0)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ であり、これは明らかに不定符号であるから、極値ではない。
- $(x,y)=(0,\pm1)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ であり、これは明らかに不定符号であるから、極値ではない。
- $(x,y)=(0,0)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ であり、これは明らかに負値であるから、極大となる。極大値 $f(0,0)=0$.

143.　$f(x,y):=4x^3-6x^2y+3xy^2+3y^3-27x+3y$ について、以下の問に答えよ。

(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。
(4) f のグラフ $z=f(x,y)$ の、$(x,y)=(1,-1)$ における接平面の方程式を求めよ。

解答　(1), (2) 略。(3) 停留点は $\pm(1,-1), \pm(2,1)$. $H(2,1)$ は正値なので $(2,1)$ で極小値 $f(2,1)=-34$, $H(-2,-1)$ は負値なので $(-2,-1)$ で極大値 $f(-2,-1)=34$. $H(1,-1)$, $H(-1,1)$ は不定符号なので、f は $\pm(1,-1)$ で極値は取らない。(4) $\nabla f(1,-1)=\mathbf{0}$, $f(1,-1)=-20$ だから、$z=-20$. ■

144.　$f(x,y) := \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + 2x^2y + y^2 - \dfrac{4}{3}$ について、以下の問に答えよ。(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

解答

(1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+xy^2+4xy \\ y^2+x^2y+2y+2x^2 \end{pmatrix}$,

(2) $H(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+4y+y^2 & 4x+2xy \\ 4x+2xy & x^2+2y+2 \end{pmatrix}$

(3) $\nabla f(x,y)=\mathbf{0}$ を解くと、$(x,y)=(0,0),(0,-2),(\pm 2,-2),(\pm\sqrt{3},-3)$. (実際、$\nabla f(x,y)=\mathbf{0}$ の第 1 式より、$x(x^2+y^2+4y)=0$. ゆえに $x=0$ または $x^2=-y^2-4y$. $x=0$ を $\nabla f(x,y)=0$ の第 2 式に代入して、$(x,y)=(0,0),(0,-2)$. 一方、$x^2=-y^2-4y$ を $\nabla f(x,y)=0$ の第 2 式に代入して、$y^3+5y^2+6y=0$. これから $y=0,-2,-3$.)

Hesse 行列の符号を調べることになる。$(0,0)$ 以外はそれで判定できる。$(0,0)$ だけ Hesse 行列だけでは判定できない。

- $(0,-2)$ で負値なので、f は極大、極大値 $f(0,-2)=0$.
- $(\pm 2,-2)$ で正値なので、f は極小、極小値 $f(\pm 2,-2)=-4$.
- $(\pm\sqrt{3},-3)$ では不定符号なので、f は極値を取らない。
- $H(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は正値でも、負値でも、不定符号でもない。

$$f(0,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{3} + \varepsilon^2 - \frac{4}{3} > -\frac{4}{3} = f(0,0) \quad (|\varepsilon| \text{ が十分小さい正数のとき}).$$

$$f(\varepsilon,-\varepsilon^2) = \varepsilon^4\left(-\frac{3}{4}+\frac{\varepsilon^2}{6}\right) - \frac{4}{3} < -\frac{4}{3} \quad (|\varepsilon| \text{ が十分小さい正数のとき}).$$

であるから $(0,0)$ は峠点であり、極値点ではない。■

145. $f(x,y) := (x^3-x)(y^3-y)$ について、以下の問に答えよ。
(1) f の gradient $\nabla f(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(2) f の極値を求めよ。

解答 (1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (3x^2-1)(y^3-y) \\ (3y^2-1)(x^3-x) \end{pmatrix}$, $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x(y^3-y) & (3x^2-1)(3y^2-1) \\ (3x^2-1)(3y^2-1) & 6y(x^3-x) \end{pmatrix}$
(3) $\nabla f(a,b) = 0$ を満たす点 (停留点) は、$(a,b) = (0,0), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\pm(1,1), \pm(1,-1), \pm(1,0), \pm(0,1)$ の 13 個。$H(a,b)$ の符号を調べて、$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき $H(a,b) = \begin{pmatrix} -4/3 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{pmatrix}$ は負値なので極大値 $\frac{4}{27}$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき $H(a,b) = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}$ は正値なので極小値 $-\frac{4}{27}$ を取る。他の点では $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ など不定符号なので極値は取らない。■

146. $f(x,y) := (x-y)e^{-x^2-y^2}$ について、以下の問に答えよ。
(1) f の gradient $\nabla f(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(2) f の極値を求めよ。

解答 (1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (1+2xy-2x^2)e^{-x^2-y^2} \\ (-1-2xy+2y^2)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$,

$$H(x,y) = 2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} (-3x+2x^3+y-2x^2y) & (x-y+2x^2y-2xy^2) \\ (x-y+2x^2y-2xy^2) & (3y-2y^3+x(-1+2y^2)) \end{pmatrix}.$$

(2) $H(1/2,-1/2) = \frac{1}{\sqrt{e}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値は $-\frac{4}{\sqrt{e}}$, $-\frac{2}{\sqrt{e}}$ で両方とも負であるから、$H(1/2,-1/2)$ は負値である。ゆえに f は $(1/2,-1/2)$ で極大、極大値 $f(1/2,-1/2) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. $H(-1/2,1/2) = \frac{1}{\sqrt{e}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{4}{\sqrt{e}}$, $\frac{2}{\sqrt{e}}$ で両方とも正であるから、$H(-1/2,1/2)$ は正値である。ゆえに f は $(-1/2,1/2)$ で極小、極小値 $f(-1/2,1/2) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$.

おまけ

伝統的に線形代数で 2 次曲線、2 次曲面を学ぶことになっていたのだが、最近は忙しくなったせいか、はしょられ気味である。せいぜいコンピューターで図を描いたりして親しんで下さい。

147.

(1) 3 次元座標空間 (xyz 空間) 内の xy 平面 ($z=0$) 上で定義された関数 f のグラフ $y=f(x)$ ($x\in[a,b]$) を x 軸のまわりに回転してできる曲面の方程式を求めよ。

(2) 直円錐 (軸や頂点など、自分の好きなように選ぶ) の方程式を一つ求めよ。

(3) コンピューターを用いて直円錐を描け。

陰関数定理と逆関数定理

148. $F(x,y):=x^3+y^3-2xy$, $P=(1,1)$ とする。$F(x,y)=0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在を示し、その点における微分係数の値を求めよ。

149. 方程式 $F(x,y,z)=x^2+(x-y^2+1)z-z^3=0$ は点 $(0,0,1)$ の近傍で z について解けることを示せ。また、その点における $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ の値を求めよ。

解答 z について解け、というわけで、定理の記述に近づけるため、$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $Y=z$, $a=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, $b=1$ とおく。

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+z & -2yz\end{pmatrix},\quad \frac{\partial F}{\partial Y}=\frac{\partial F}{\partial z}=x-y^2+1-3z^2,$$

ゆえに

$$\frac{\partial F}{\partial X}(a,b)=\begin{pmatrix}2\cdot 0+1 & -2\cdot 0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix},\quad \frac{\partial F}{\partial Y}(a,b)=0-0^2+1-3\cdot 1^2=-2.$$

$\det \frac{\partial F}{\partial Y}(a,b) = -2 \neq 0$ であるから、(a,b) の十分小さな開近傍で、$F(X,Y)=0$ は $Y=\varphi(X)$ と解ける。つまり $z=\varphi(x,y)$ と解けるわけである。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \varphi'(x,y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial X} = -\frac{1}{x-y^2+1-3z^2}\begin{pmatrix} 2x+z & -2yz \end{pmatrix}.$$

$(a,b)=(0,0,1)$ においては、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.\blacksquare$$

150. 変数 x, y, z, u, v の間に $xy+uv=0$, $\quad x^2+y^2+z^2=u^2+v^2$ の関係があるとする。点 $(x,y,z,u,v)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1,1,2)$ の近傍において、これを u, v について解けることを示せ。さらに $(x,y,z)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ における $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ の値を求めよ。

151. $F(x,y,z)=\begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix}$, $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, $F_2(x,y,z)=x+y+z$ によって $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を定めるとき、$y \neq z$ なる点の近くでは、$F(x,y,z)=0$ が $y=\varphi_1(x)$, $z=\varphi_2(x)$ と y, z について解けることを示し、φ_1', φ_2' を求めよ。

152. $F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $F_1(x,y)=x^2-y^2$, $F_2(x,y)=2xy$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で F の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の近傍における F の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

153. $F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $F_1(x,y)=x^3-3xy^2$, $F_2(x,y)=3x^2y-y^3$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で F の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の近傍における F の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

154. $F(x,y) := x(x-1)^2-y^2$ とするとき、以下の問に答えよ。(1) 方程式 $F(x,y)=0$ で定義される xy 平面内の曲線の概形を描け。(2) $F(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ について、記した陰関数定理が適用できない点 (その点の近傍での陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在が定理から主張できない点) を求めよ。

155. $F(x,y) := y^2 - y^4 - x^2$, $N_F := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; F(x,y) = 0\}$ とおく。N_F 上の点 $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ の十分小さな近傍で、$F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、P における接線の方程式を求めよ。また、N_F 上の点で、陰関数定理の仮定が満たされないもの (全部で 5 個ある) をすべて求めよ

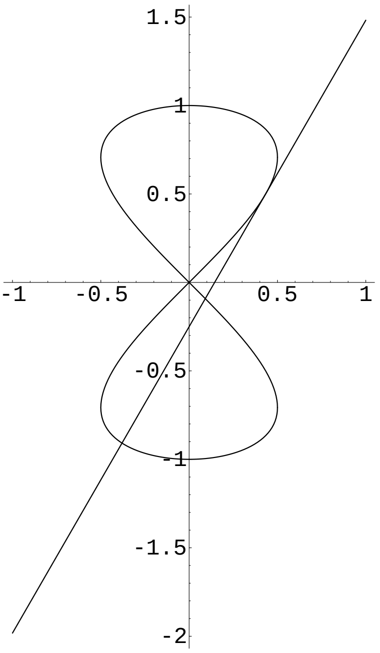


図 1: $y^2 - y^4 - x^2 = 0$ と接線

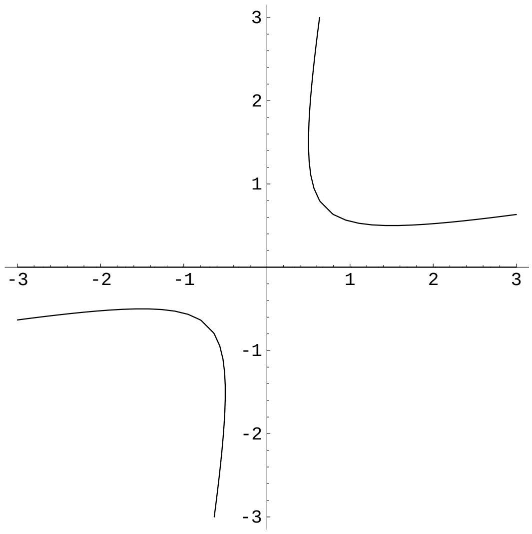


図 2: $x^2 - 6xy + y^2 + 2 = 0$

156. a を正定数とし、$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を $F(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-a^2 \\ x^2+y^2-ax \end{pmatrix}$ で定める。$F(\alpha,\beta,\gamma) = 0$ を満たす点 (α,β,γ) の点の近傍で、$F(x,y,z) = 0$ を (y,z) について解くことを考える。(a) 陰関数定理の仮定の成り立たない点を求めよ。(b) 陰関数定理の仮定が成り立つ点の近傍で、$\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ を求めよ。

解答 (1) 省略 (2) $X = x$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ とする。

$$\det \frac{\partial F}{\partial Y} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = -4yz$$

であるから $yz\neq 0$ であれば陰関数定理が使える。(a) $y=0$ または $z=0$. $y=0$ とすると、$x=0,a$. $(x,y,z)=(0,0,\pm a),(a,0,0)$. (b) それ以外の点では、$Y=\varphi(X)$ すなわち $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ と解ける。

$$\begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_1'(x) \end{pmatrix} = \varphi'(X) = -\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial X} = -\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2x \\ 2x-a \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{-4yz}\begin{pmatrix} 0 & -2z \\ -2y & 2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x \\ 2x-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2z(2x-a)}{4yz} \\ \dfrac{-4xy+2y(2x-a)}{2yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a-2x}{2y} \\ \dfrac{a}{2z} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

条件付き極値問題

最初に有界閉集合上の連続関数の性質について復習する問題を 2 つ。これを理解しておかないと、以下の多くの問題が理解できない。

157. $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ と $g\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ は連続関数とする。$N_g := \{x\in\mathbf{R}^n; g(x)=0\}$ とおくとき、以下の (1), (2) が成り立つことを示せ。

(1) N_g は閉集合である。

(2) N_g が空でない有界集合ならば、f は N_g 上で、最大値と最小値を持つ。

158. $n\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{R}^n$, $g\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ は連続とする。$N_g := \{x\in\mathbf{R}^n; g(x)=0\}$ とおくとき $N_g\neq\emptyset$ と仮定する。このとき、$f(x) := \|x-a\|^2$ は N_g 上で最小値を持つことを示せ。

以下は Lagrange の未定乗数法の問題である。

159. $f(x,y) := x^2+y^2$, $g(x,y) := x^2-6xy+y^2+2$, $N_g := \{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)=0\}$ とする。

(1) N_g 上で f が (x_0,y_0) で極値を取るとはどういうことか、説明せよ。

(2) N_g 上で $\nabla g\neq 0$ であることを示せ。

(3) Lagrange の未定乗数法により、N_g 上での f の最小値を求めよ。

解答 $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-3y \\ y-3x \end{pmatrix}$.

(1) $\exists\varepsilon > 0$ s.t. f は $N_g \cap B((x_0, y_0); \varepsilon)$ 内の最大値または最小値を (x_0, y_0) で取る。粗く言うと、「(x_0, y_0) の十分小さな近傍と N_g の共通部分で、$f(x_0, y_0)$ が最大値または最小値となること。」

(2) $\nabla g(x,y) = 0$ とすると、$(x,y) = (0,0)$ が導かれ、一方 $g(0,0) = 2 \neq 0$ であるから $(0,0) \notin N_g$. ゆえに $\nabla g(x,y) \neq 0$ on N_g.

(3) $B := \{(x,y); x^2 + y^2 \le 2^2\}$ (原点中心半径 2 の閉円盤) とおく。$B \cap N_g$ は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合である。ゆえに f が $B \cap N_g$ で最小値を持つ。それは明らかに 4 以下である。$(\mathbf{R}^2 \setminus B) \cap N_g$ 上の任意の点において、f は 4 より大きいので、$B \cap N_g$ における最小値は、N_g における最小値となる。特に f は N_g 上で最小値を持つことが分かった。最小値は極値であるが、(2) で示したことから、条件 $g(x,y) = 0$ の下での条件付き極値は、Lagrange の未定乗数法で求まる。すなわち、(x,y) で極値を取ったとすると、$\exists\lambda \in \mathbf{R}$ s.t.

$$\nabla f(x,y) = \lambda g(x,y), \quad g(x,y) = 0. \qquad (☆)$$

前者から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x-3y \\ y-3x \end{pmatrix}$. これから[3] $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 係数行列が逆行列を持つと $(x,y) = (0,0)$ となり、これは不適 ($g(x,y) = 0$ を満たさない)。逆行列を持たないためには、$(\lambda - 1)^2 - (3\lambda)^2 = 0$ が必要十分で、これから $(4\lambda - 1)(2\lambda + 1) = 0$. すなわち $\lambda = \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$.

(i) $\lambda = 1/4$ のとき、$\nabla f(x,y) = \lambda g(x,y)$ は $x + y = 0$ と同値で、これと $g(x,y) = 0$ を連立させると実数解なし。

(ii) $\lambda = -\frac{1}{2}$ のとき、$\nabla f(x,y) = \lambda g(x,y)$ は $x = y$ と同値で、これと $g(x,y) = 0$ を連立させると、$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. ゆえに $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. いずれも f の値は 1.

ゆえに、極値の候補点は $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ しかない。ゆえにこれらが最小値である。■

[3] $\frac{1}{\lambda}$ が行列 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値で、(x,y) が固有ベクトル、ということに気が付いて線型代数に持ち込んでもよい。

160.　点 (x,y,z) が方程式 $\dfrac{(x-1)^2}{1}+\dfrac{(y-2)^2}{4}+\dfrac{(z-3)^2}{9}=1$ で表わされる $\mathbf{R}^3$ の部分集合 E の上を動くときの、関数 $f(x,y,z)=x+y+z$ の値について考える。
(1) f は E で最大値、最小値を持つことを示せ。(2) f の E における最大値、最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ。(3) f が (x_0,y_0,z_0) で最大値 k を取るとき、方程式 $x+y+z=k$ で表わされる集合と E はどういう関係にあるか。

解答　(この問題は図形的「直観」で、接するときが最大最小を与えると分かるので、未定乗数法を使わなくても答は出る。)

(1) E は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であり、f は連続であるから、「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合上の実数値連続関数は最大値・最小値を持つ」という定理により、f は E 上最大値を持つことが分かる。

(2) $g(x,y,z) := \dfrac{(x-1)^2}{1}+\dfrac{(y-2)^2}{4}+\dfrac{(z-3)^2}{9}-1$ とおくと、$\nabla g(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x-1 \\ \dfrac{y-2}{4} \\ \dfrac{z-3}{9}\end{pmatrix}$. これは E の上で 0 にならない (g が 0 になるには、$(x,y,z)=(1,2,3)$ となることが必要十分だが、この点は E に含まれない)。ゆえに E 上の f の極値は未定乗数法で求まる。(x,y,z) が極値点であるための必要十分条件は、

$$\exists\lambda\in\mathbf{R}\quad\text{s.t.}\quad \nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z),\quad g(x,y,z)=0$$

で、最初の式から $x-1=\dfrac{1}{2\lambda}$, $y-2=\dfrac{4}{2\lambda}$, $z-3=\dfrac{9}{2\lambda}$ が得られ、これを 2 番目の式 $g(x,y,z)=0$ に代入すると、$2\lambda=\pm\sqrt{14}$. 極値は

$$f\left(1+\frac{1}{\sqrt{14}},2+\frac{4}{\sqrt{14}},3+\frac{9}{\sqrt{14}},\right)=6+\sqrt{14},\quad f\left(1-\frac{1}{\sqrt{14}},2-\frac{4}{\sqrt{14}},3-\frac{9}{\sqrt{14}},\right)=6-\sqrt{14}.$$

最大値と最小値は (1) で存在が分かっていて、それは当然極値であり、極値はこの 2 つしかないので、最大値は $6+\sqrt{14}$, 最小値は $6-\sqrt{14}$.

(3) $x+y+z=k$ は (x_0,y_0,z_0) で E に接する。■

161.　$\mathbf{R}^3$ において、曲面 $xyz=1$ 上の点で原点に最も近いものを求めよ。

解答 $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xyz-1$ とおく。講義の例と同様の考察で条件 $g(x,y,z)=0$ の下での f の最小値が存在することが示される (省略)。

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (g(x,y,z)=0 \text{ なる任意の } (x,y,z))$$

であるから、条件 $g(x,y,z)=0$ の下での f の極値は Lagrange の未定乗数法で求まる。$F(x,y,z,\lambda) \overset{\text{def.}}{=} f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$ とおくと、$\nabla F(x,y,z,\lambda)=0$ から $(x,y,z,\lambda)=(-1,-1,1,2)$, $(-1,1,-1,2)$, $(1,-1,-1,2)$, $(1,1,1,2)$. いずれの場合も $f(x,y,z)=3$ であるから、これは f の最小値である。ゆえに曲面 $g(x,y,z)=0$ 上の点と原点との距離 $(=\sqrt{f(x,y,z)})$ の最小値は $\sqrt{3}$. ■ (**別解** 3 正数についての「相加平均 $\geq$ 相乗平均」という不等式から $x^2+y^2+z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3$, 等号 $\Leftrightarrow x^2=y^2=z^2 \Leftrightarrow (x,y,z)=(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$) ■

162. 条件 $x^2+y^2-1=0$ のもとで、関数 $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ の最大値、最小値を求めよ。(**注意:** どういう手段で解いても良い。)

163. a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $b \in \mathbf{R}$, $(a_1,a_2,\cdots,a_n) \neq (0,0,\cdots,0)$ とするとき、条件 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b=0$ のもとで、$f(x)={x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2$ の最小値を求めよ。

164. $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $F(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^3-3xy+y^3=0$ で定義するとき、以下の問に答えよ。

(i) $F(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) の十分近くで、$F(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在を陰関数定理で保証するための、(a,b) についての条件 (なるべく簡単なもの) を求めよ。

(ii) (i) の条件が成り立つとき、陰関数定理で存在が保証された陰関数 φ に対して $\varphi'(x_0)=0$ となる点 x_0 を求め、$\varphi''(x_0)$ の符号を調べて、φ が極値を取るかどうか答えよ。

165. 条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2=1$ のもとでの $f(x_1,\cdots,x_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^3$ の最大値と最小値を求めよ。

166. $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ と $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y,z) := x^2y^2z^2$, $g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$ で定め、$N_g := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; g(x,y,z)=0\}$ とおく。

(1) f は N_g 上で正の最大値を取ることを示せ。

(2) Lagrange の未定乗数法を用いて、f の N_g における最大値を求めよ。

(3) 上の結果を用いて、任意の正数 a, b, c について、不等式 $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ。

解答

(1) N_g は $\mathbf{R}^3$ の閉球なので、しばしば説明しているように、$\mathbf{R}^3$ の有界閉集合である。f は N_g 上で連続なので、N_g 上で最大値を取る。f は N_g 上で正の値を取ることがあるので (例えば $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in N_g$, $f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 1/27 > 0$)、最大値は正である。

(2) f が $(a,b,c) \in N_g$ で最大値を取ったとする。もちろん、最大値は極大値である。本試験でもやったように $\nabla g \neq \mathbf{0}$ (on N_g) であるから、極大値を与える点は Lagrange の未定乗数法で見付かる。

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(a,b,c) = \lambda \nabla g(a,b,c), \quad g(a,b,c) = 0.$$

前者から

$$a(\lambda - b^2c^2) = b(\lambda - c^2a^2) = c(\lambda - a^2b^2).$$

もしも a, b, c のいずれかが 0 であれば、$f(a,b,c) = a^2b^2c^2 = 0$ となり、$f(a,b,c) > 0$ であることに矛盾する。ゆえに $a,b,c \neq 0$. すると

$$\lambda = b^2c^2 = c^2a^2 = a^2b^2.$$

もう一度 $a,b,c \neq 0$ を用いると、$a^2 = b^2 = c^2$. $g(a,b,c) = 0$ より $a^2 = b^2 = c^2 = 1/3$. こうして

$$(a,b,c,\lambda) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{9}\right) \quad (\text{複号任意}).$$

このとき (いずれも) $f(a,b,c) = (1/3)^3 = \dfrac{1}{27}$. これが最大値に他ならない。

(3) $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$ とおくことにより、

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$$

を証明すればよい。両辺ともに 2 次同次である (x, y, z を λ (> 0) 倍すると、値が λ^2 倍になる) から、条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ が成り立っているときに示せば十分である。すなわち

$$\frac{1}{3} \geq (x^2y^2z^2)^{1/3} \quad (x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$$

が証明できれば良い。(2) より

$$\frac{1}{27} \geq x^2y^2z^2 \quad (x^2 + y^2 + z^2 = 1)$$

が証明できているので、両辺の 3 乗根を取ればよい。 ■