多変数の微分積分学1 練習問題 No. 10　(2013年7月1日出題,　　月　日提出)

__年16組____番　氏名_____________

問10　C^∞ 級の2変数関数 $f(x,y)$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$ と、$(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $(h,k)\in\mathbf{R}^2$ があるとき、

$$F(t):=f\left(a+th,b+tk\right)\quad (t\in\mathbf{R})$$

とおくとき、次の (1), (2) に答えよ[1]。　　——— 合成関数の微分法で、Taylorの定理の準備

(1) $F'(t)$, $F''(t)$, ... を (微分の階数の低い方からいくつか) 計算せよ。

(2) $F^{(m)}(t)$ $(m\in\mathbf{N})$ の公式を推測し、数学的帰納法で証明せよ。

[1](授業でやるけれど) n 変数関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ について、$F(t):=f(a_1+th_1,a_2+th_2,\cdots,a_n+th_n)$ とおき、上と同様のことを行なってみよう。

解　(1)

$$F'(t) = f_x x_t + f_y y_t = f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k,$$

簡単のため、$c := (a+th, b+tk)$ とおく。f が C^2 級であることから、$f_{xy} = f_{yx}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} F''(t) &= \left(f_{xx}(c)h + f_{xy}(c)k\right)h + \left(f_{yx}(c)h + f_{yy}(c)k\right)k \\ &= f_{xx}(c)h^2 + 2f_{xy}(c)hk + f_{yy}(c)k^2, \end{aligned}$$

f が C^3 級であることから、$f_{xxy} = f_{xyx}$, $f_{xyy} = f_{yyx}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} F''(t) &= \left(f_{xxx}(c)h + f_{xxy}(c)k\right)h^2 + 2\left(f_{xyx}(c)h + f_{xyy}(c)k\right)hk + \left(f_{yyx}(c)h + f_{yyy}(c)k\right)y^2 \\ &= f_{xxx}(c)h^3 + 3f_{xxy}(c)h^2k + 3f_{xyy}(c)hk^2 + f_{yyy}(c)k^3. \end{aligned}$$

(2) $m = 1, 2, 3$ での結果から

$$(\heartsuit) \qquad F^{(m)}(t) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{\partial^m f}{\partial x^r \partial y^{m-r}}(a+th, b+tk)h^r k^{m-r}$$

と推測される。$m = n$ のとき $(\heartsuit)$ が成立したと仮定すると、chain rule と $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$ から、

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(t) &= \frac{d}{dt}F^{(n)}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\partial^n f}{\partial x^r \partial y^{n-r}}(a+th, b+tk)h^r k^{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{r+1} \partial y^{n-r}}(c)h + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n-r+1}}(c)k \right) h^r k^{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{r+1} \partial y^{n+1-(r+1)}}(c)h^{r+1}k^{n+1-(r+1)} + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} \\ &= \sum_{r'=1}^{n+1} \binom{n}{r'-1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{r'} \partial y^{n+1-r'}}(c)h^{r'}k^{n+1-r'} + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} \\ &= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(c)h^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \left(\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \right) \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(c)k^{n+1} \\ &= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(c)h^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(c)k^{n+1} \\ &= \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(a+th, b+tk)h^r k^{n+1-r}. \end{aligned}$$

これは $m = n+1$ のときも $(\heartsuit)$ が成り立つことを示している。ゆえに帰納法により、$(\heartsuit)$ は任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して成り立つ。■