多変数の微分積分学1 練習問題 No.12 (2013年7月8日出題, 　月　日提提出)

__年16組____番　氏名______________

問12　$f(x,y) := 2x^3 + 6xy^2 - 2x$ について、以下の問に答えよ。

(1) $f'(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。(4) f のグラフ $z = f(x,y)$ の $(x,y) = (1,1)$ での接平面の方程式を求めよ。

```
f[x_,y_]:=2x^3+6x y^2-2x
jf[x_,y_]:=D[f[a,b],{{a,b}}]/.{a->x,b->y}
jf[x,y]
H[x_,y_]:=D[f[a,b],{{a,b},2}]/.{a->x,b->y}
MatrixForm[H[x,y]]
sp=Solve[jf[x,y]=={0,0},{x,y}]
H[x,y]/. sp
Eigenvalues[H[x,y]]/. sp
f[x,y]/.sp
```

解説 (2013/7/15)

(1) $f'(x,y) = (f_x\ f_y) = \begin{pmatrix} 6x^2+6y^2-2 & 12xy \end{pmatrix}$.

(2) $H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$.

(3) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は C^∞ 級である。極値を取る点 (x,y) では $f'(x,y)=0$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} f'(x,y)=0 &\Leftrightarrow 6x^2+6y^2-2=0 \wedge 12xy=0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2+3y^2=1 \wedge (x=0 \vee y=0) \\ &\Leftrightarrow (x=0 \wedge 3x^2+3y^2=1) \vee (y=0 \wedge 3x^2+3y^2=1) \\ &\Leftrightarrow (x,y)=\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \vee (x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0\right). \end{aligned}$$

$f'(x,y)=0$ となる点 (x,y) は、$\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$.

$H\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ でこれは不定符号なので極値を取らない。

$H\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ は正値である。ゆえに f は狭義の極小値を取る。極小値 $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

$H\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = -\begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ は負値である。ゆえに f は狭義の極大値を取る。極大値 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

(4) $z=f(x,y)$ の $(-1,1)$ における接平面の方程式は

$$z = f'(-1,1)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} + f(-1,1).$$

$f'(-1,1) = (6+6-2 \quad -12) = (10 \quad -12)$ であるから、右辺は

$$10(x+1)-12(y-1)-6 = 10x-12y+16.$$

ゆえに接平面の方程式は $z = 10x - 12y + 16.$

$z = f(x, y)$ の (a, b) における接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b).$$

$$f_x(-1, 1) = 6 + 6 - 2 = 10, \quad f_y(-1, 1) = -12, \quad f(-1, 1) = -2 - 6 + 2 = -6$$

であるから、

$$z = 10(x + 1) - 12(y - 1) - 6.$$

整理して $z = 10x - 12y + 16.$ ■