多変数の微分積分学１ 練習問題 No.4　(2013 年 5 月 13 日出題、5 月　日提出)

__年____組____番　氏名________________

問 4　つぎの lim が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。発散する場合も ∞ または $-\infty$ であるときはそれを指摘せよ。出来る限り根拠を書くこと。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}(3x^2+4xy+5y^2)$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{2+3xy}{4x^2+5y^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$　(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$　(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}$.

解説　次の命題を事前に証明しておかないと面倒だよね、となった。

命題 0.1 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とする。

(1) $\forall x \in \Omega\ f(x) > 0$, $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

証明

(1) $\forall R \in \mathbf{R}$ に対して, $\varepsilon := \dfrac{1}{|R|+1}$ とおくと、$\varepsilon > 0$. 仮定 $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = 0$ より、$\exists \delta > 0$ s.t. $|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$. 仮定 $f(x) > 0$ より、このとき、$f(x) = |f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon} = |R|+1 > R$. ゆえに $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$R := \dfrac{1}{\varepsilon}$ とおくと $R > 0$. 仮定 $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ より、$\exists \delta > 0$ s.t. $|x-a| < \delta\ f(x) > R$. このとき、$0 < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{R} = \varepsilon$. ゆえに $|f(x) - 0| < \varepsilon$. ゆえに $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. ■

解答

(1) $f(x,y) := 3x^2 + 4xy + 5y^2$ は多項式関数であるから、$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。特に $(1,2)$ で連続であるから、$(x,y) \to (1,2)$ のときの極限は、$f(1,2)$ に等しい:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 = 3 + 8 + 20 = 31.$$

(2) $f(x,y) := \dfrac{2+3xy}{4x^2+5y^2}$ は有理式で、その分母が 0 にならない範囲 $\Omega := \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ が定義されて連続である。特に $(0,1) \in \Omega$ で連続であるから、$(x,y) \to (0,1)$ のときの極限は、$f(0,1)$ に等しい:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = f(0,1) = \frac{2 + 3 \cdot 0 \cdot 1}{4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 1^2} = \frac{2}{5}.$$

(3) f は有理関数で、$(0,0)$ で分母が 0 になることに注意する。$(x,y) \to (0,0)$ のとき 分母 $= x^2 + y^2 \to +0$, 分子 $= 1 \not\to 0$ であるから、極限は存在しない。

(別解) f は分母が 0 になる点を除いた $\Omega := \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義され、連続である。$\widetilde{f} := \dfrac{1}{f}$ とおくと、$\forall (x,y) \in \Omega\ \widetilde{f}(x,y) = x^2 + y^2 > 0$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \widetilde{f}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0^2 + 0^2 = 0$. ゆえに命題 0.1 から $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\widetilde{f}(x)} = \infty$.

(4) $(x,y)\to(0,0)$ のとき、分子 $= x+y\to 0$, $x^2+y^2\to +0$, 分母 $=\log(x^2+y^2)\to -\infty$ であるから、$\dfrac{0}{-\infty}$ で、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}=0.$$

もう少し丁寧にやると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\times\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\log\left(x^2+y^2\right)}=0\cdot 0=0.$$

第 2 因子が 0 であることは、合成関数の極限で OK だが (例えば $r:=\sqrt{x^2+y^2}$ とおき、$\dfrac{1}{\log r^2}\to 0$ $(r\to +0)$ を示すのは簡単)、有界であることを言うのも簡単だから、次のような解答もある。

$x^2+y^2\le\frac{1}{2}$ のとき、$\log(x^2+y^2)\le\log\frac{1}{2}=-\log 2<0$ より $|\log(x^2+y^2)|\ge\log 2$ に注意すると、

$$\left|\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}\right|\le\frac{|x+y|}{\log 2}\to 0\quad((x,y)\to(0,0)).$$

(5) いわゆる不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。近づく方向を限定して考えてみると何か分かることがある。x 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

y 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1.$$

これら 2 つの極限が一致しないので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$ は存在しない。

(6) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。x 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{y=0\\ (x,y)\to(0,0)}}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

y 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{x=0\\ (x,y)\to(0,0)}}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

これら 2 つの極限が一致しないので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は存在しない。

(7) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。x 軸, y 軸や、$y=kx$ (k は定数) にそっての極限は、すべて 0 であることが分かる。実際例えば

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(kx)^2}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{1+k^2} = 0.$$

これから 0 に収束しそうだと見当をつけて証明を考える。

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = x^2\frac{y^2}{x^2+y^2} \le x^2\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = x^2 \to 0^2 = 0 \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

はさみうちの原理から、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

(8) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。$f(x,y) := xy$, $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$, $a=(0,0)$, $b=0$, $c=1$ とおくと、

$$\lim_{(x,y)\to a} f(x,y) = b, \quad \lim_{z\to b} g(z) = c$$

であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\to a} g(f(x,y)) = \lim_{z\to b} g(z) = c = 1.$$

もう少しきちんと書くと: $A := \{(x,y)\in \mathbf{R}^2; xy\ne 0\}$, そして

$$f\colon A \ni (x,y) \mapsto xy \in \mathbf{R}, \quad g\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \ni z \mapsto \frac{\sin z}{z} \in \mathbf{R}$$

とおく。$f(x,y)$ は x と y の多項式であるから、いたるところ連続である。ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. 一方 (高校で学んだように) $\displaystyle\lim_{z\to 0} g(z) = 1$ である。$f(A) \subset \mathbf{R}\setminus\{0\}$ であるから、g と f は合成できて、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y)) = 1.$$

ϵ-δ 論法でやると、以下のようになる。

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ であるから、$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta'>0$ s.t.

$$|\theta| \le \delta' \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sin\theta}{\theta} - 1\right| \le \varepsilon.$$

$\delta := \sqrt{2\delta'}$ とおくと、$\delta > 0$ で、$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ のとき、

$$|xy| \le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) < \frac{\delta^2}{2} = \delta'.$$

ゆえにこのとき、

$$\left|\frac{\sin(xy)}{xy} - 1\right| \le \varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1.$ ■