多変数の微分積分学1 練習問題 No.5　(2013年5月20日出題,　月　日提出)

__年16組____番　氏名______________

問5　(1) $f(x,y,z) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ とするとき、次式を示せ (まず f_x, f_{xx} を計算せよ)。

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0.$$

解答

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right) \\
&= -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} x = -\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} x\right) \\
&= -\left\{-\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}\cdot(2x)\cdot x + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot 1\right\} \\
&= \frac{3x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} - \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

同様に

$$f_{yy} = \frac{3y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} - \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, \quad f_{zz} = \frac{3z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} - \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
f_{xx}+f_{yy}+f_{zz} &= \frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} - \frac{3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

講評

$$f_x = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)'$$

と書く人がいるけれど、$'$ は全微分を表す記号なので不適切である。

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

とすべきである。