多変数の微分積分学1 練習問題 No. 7 (2013年6月3日出題, 　月　日提出)

__年16組____番　氏名______________

問7　次の関数の微分 f' を求めよ。(3) はヤコビアン $\det f'$ も求めよ。

(1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ x + y^4 \end{pmatrix}$　(2) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　(3) $f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$.

解答

(1) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ とするとき、

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 1 & 4y^3 \end{pmatrix}.$$

(2) a を定数とするとき、

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{d}{dx}\left(x^2+a\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(x^2+a\right)^{-3/2}\cdot 2x = -\frac{x}{\left(x^2+a\right)^{3/2}}$$

であるから、

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = -\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

(物理学に良く登場するポテンシャルの微分)

(3)

$$f'(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial r} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

ヤコビアンは、例えば 3 列目で展開して

$$\begin{aligned} \det f'(r,\theta,\phi) &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+3}(-r\sin\theta\sin\phi)\begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3} r\sin\theta\cos\phi \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin\theta\sin^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\phi = r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

あるいは Sarrus の規則を使って

$$\begin{aligned} \det f'(t,\theta,\phi) &= 0 + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &= r^2\sin^3\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + r^2\sin\theta\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \\ &= r^2\sin^3\theta + r^2\sin\theta\cos^2\theta = r^2\sin\theta. \blacksquare \end{aligned}$$