多変数の微分積分学１ 練習問題 No.9　(2013 年 6 月 24 日出題,　 月　日提出)

__ 年 16 組 ____ 番　氏名 ______________

問 9　C^2 級の関数 $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ と正定数 c があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi,\eta) = u(x,t), \quad \text{すなわち} \quad v(\xi,\eta) := u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)$$

とおく。このとき次式を証明せよ (左辺、右辺どちらから始めても良い、余裕あれば両方)。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}.$$

解　(右辺から左辺)

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi)$$

であるから、

$$x_\xi = \frac{1}{2}, \quad x_\eta = \frac{1}{2}, \quad t_\xi = -\frac{1}{2c}, \quad t_\eta = \frac{1}{2c}.$$

chain rule によって

$$\begin{aligned}
v_\eta &= u_x x_\eta + u_t t_\eta = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2c}u_t, \\
v_{\eta\xi} &= \frac{1}{2}(u_{xx}x_\xi + u_{xt}t_\xi) + \frac{1}{2c}(u_{tx}x_\xi + u_{tt}t_\xi) = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c}u_{xt} + \frac{1}{4c}u_{tx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} \\
&= \frac{1}{4}\left(u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt}\right).
\end{aligned}$$

ただし u が C^2 級であるから $u_{xt} = u_{tx}$ が成り立つことを用いた。ゆえに

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.$$

あるいは

$$\begin{aligned}
v_{\eta\xi} &= \frac{\partial}{\partial\xi}u_x \cdot x_\eta + u_x\frac{\partial}{\partial\xi}x_\eta + \frac{\partial}{\partial\xi}u_t \cdot t_\eta + u_t\frac{\partial}{\partial\xi}t_\eta \\
&= (u_{xx}x_\xi + u_{xt}t_\xi)x_\eta + u_x \cdot x_{\eta\xi} + (u_{tx}x_\xi + u_{tt}t_\xi)t_\eta + u_t \cdot t_{\eta\xi} \\
&= u_{xx}x_\xi x_\eta + u_{xt}t_\xi x_\eta + u_{tx}x_\xi t_\eta + u_{tt}t_\xi t_\eta + u_x x_{\eta\xi} + u_t t_{\eta\xi} \\
&= \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c}u_{xt} + \frac{1}{4c}u_{tx} + \left(-\frac{1}{4c^2}\right)u_{tt}.
\end{aligned}$$

(左辺から右辺)

$$\xi_x = 1, \quad \xi_t = -c, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_t = c.$$

chain rule によって

$$\begin{aligned}
u_t &= v_\xi\xi_t + v_\eta\eta_t = -cv_\xi + cv_\eta, \\
u_{tt} &= -c(v_{\xi\xi}\xi_t + v_{\xi\eta}\eta_t) + c(v_{\eta\xi}\xi_t + v_{\eta\eta}\eta_t) = c^2v_{\xi\xi} - c^2v_{\xi\eta} - c^2v_{\eta\xi} + c^2v_{\eta\eta} \\
&= c^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}), \\
u_x &= v_\xi\xi_x + v_\eta\eta_x = v_\xi + v_\eta, \\
u_{xx} &= v_{\xi\xi} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

ただし v が C^2 級であるから、$v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi}$ であることを用いた。ゆえに

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (v_{\xi\xi} - 2v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}) - (v_{\xi\xi} + 2v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}) = -4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.\blacksquare$$