多変数の微分積分学 2

第 1 部 (重積分)

桂田 祐史

2008 年 11 月 18 日, 2022 年 12 月 10 日

(https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/)

序

この文書は明治大学数学科 2 年生後期の講義科目「多変数の微分積分学 2」の第 1 部 (内容としては多変数関数の Riemann 積分を扱う) の講義ノートである。

伝統的な微分積分学であるから、できれば市販の教科書で済ませたかったのであるが、多変数関数の積分は、(ページ数も少なく) ごくごく簡単に説明されるか、非常に重厚な説明を延々とされるか、のどちらかである場合が多く、残念ながら適当なものが見つけられなかったため[1]、教科書なしで講義を行っている。それを補う目的で講義ノート[2]を公開することにしている。

1 変数関数の微積分のイロハと、多変数の微分積分学 1 (多変数関数の微分法) の内容をマスターしていれば、他の本を参照しなくても済むようになっている (はずである)。

曲面積や面積分は第 2 部「ベクトル解析」に分類してある (この文書では取り扱っていない)。

この文書はあくまでも「講義のためのノート」であって、どこをどのように説明するかは、その都度教育的観点から判断している (授業ではあちこち省略したり、はしょったり、説明を追加したりする)。初学者が自習書として使うのは難しいと思われる。要するに授業にはちゃんと出席して下さい。

この講義の内容を決める際に参考にした文献については、付録 1.8.4 にあげてある。

この文書は電子版 (PDF) を

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/

で公開してある。有効に利用してもらえれば幸いである。

多変数関数の微分法に関しては、

https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu1/

においてある文書が参考になるかもしれない。

TEX 組版上の問題に対処するため、久しぶりに手を入れた (2021/3)。内容は変更していない。

[1] 微積分の教科書はよりどりみどりのような気がするが、それは 1 変数関数の微積分に限ったことらしい。

[2] この講義ノートも、年を経るにつれて段々重くなってきたような気がしているが、なるべく簡潔になるよう努力しているつもり…

記号と約束

複素数全体の集合、実数全体の集合、有理数全体の集合、整数全体の集合、自然数[3]全体の集合をそれぞれ $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$ で表す。

行列やベクトルの転置は右上に T を書いて表す: A^T, x^T 等。

以下 $\mathbf{R}^n$ と書いた場合、n は自然数であって、

$$\mathbf{R}^n := n \text{ 個の } \mathbf{R} \text{ の直積} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T; x_j \in \mathbf{R}\ (j = 1, 2, \ldots, n)\}$$

であるとする。

$x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ に対して、x のノルム $\|x\|$ を

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$$

で定義する。$a \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$ とするとき、a を中心とする半径 r の開球 $B(a; r)$ を

$$B(a; r) := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| < r\}$$

で定義する。

A から B の要素を除いた集合 (**差集合**) を $A \setminus B$ と書く:

$$A \setminus B := \{x \in A; x \notin B\}.$$

A の補集合を A^c と書く。例えば $A \subset \mathbf{R}^n$ ならば、

$$A^c := \mathbf{R}^n \setminus A.$$

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 Ω の**内部**、**閉包**、**境界**をそれぞれ Ω°, $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega$ と書く:

$$\Omega^\circ := \{x \in \mathbf{R}^n; \exists\varepsilon > 0 \quad B(x; \varepsilon) \subset \Omega\},$$

$$\overline{\Omega} := \{x \in \mathbf{R}^n; \forall\varepsilon > 0 \quad B(x; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\},$$

$$\partial\Omega := \{x \in \mathbf{R}^n; \forall\varepsilon > 0 \quad B(x; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad B(x; \varepsilon) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}.$$

領域とは、連結な開集合のことをいう。閉領域とは、ある領域にその閉包を合併したものになっている集合のことをいう。

定義域が開集合でない関数の微分可能性　多変数関数の微分法の多くのテキストでは、関数の定義域が開集合である場合のみを扱っている。積分を扱う場合、しばしば開集合でない集合 Ω 上の関数 $\varphi\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ を扱う必要が生じる。この文書では、φ が Ω で C^k 級であることを、Ω を含むある開集合上の C^k 級関数に拡張できることと定義する。

[3] この講義では、1 以上の整数 1, 2, 3, $\cdots$ のことを自然数と呼ぶ。

目 次

第0章　講義内容イントロダクション

「多変数の微分積分学 2」は「多変数の微分積分学 1」の続きであり、多変数関数の微分積分学を学ぶ。より詳しく言うと、次の 2 つがテーマである。

1. **多変数関数の積分 (重積分)** $\mathbf{R}^n$ の部分集合 Ω 上定義された関数 f の積分

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \iint\cdots\int_\Omega f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n$$

　を定義し、その基本的な性質を論ずる。

2. **多変数関数の微積分** 曲線や曲面など「曲がったもの」の上での積分 (線積分、面積分)、Gauss-Green-Stokes の定理 (1 変数関数の微分積分学の基本定理、すなわち「微分と積分は互いに逆の演算である」と言う定理の多変数版)。

　ベクトル解析と外微分法(がいびぶんほう)という二つの流儀がある。

0.1　多変数関数の積分についてのイントロ

記述をなるべくすっきりさせるために、説明の多くを 1 または 2 変数の場合ですませるが、n 変数 (n は任意の自然数) でも多少面倒になるだけで、本質は変らないことが多い。

1 変数関数の積分については、1 年生で一通り説明したことになっているが、計算テクニックは別にして、理論的な面においてはまだ不十分なので、少し補足する。

0.1.1　物理的な (?) 説明

積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ は、Ω 上に何かあるものが密度 f で分布しているときに、Ω 全体での総量を表していると解釈できる。

積分は密度から総量を求める演算である

例えば 2 変数関数の積分

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

は、何かが平面図形 Ω 上に、面密度 (単位面積あたりの量) f で分布しているときの、Ω 全体での総量を表す。

0.1.2　3 つのヒント

積分の定義は結構込み入っているので、迷子にならないように、イメージを作るのに役立つヒントを 3 つ述べる。

1. 積分は測度である
2. 積分は和に似ている
3. 積分は微分と深い関係にある

ちなみに以下「積分」と言ったら普通は定積分を意味する。

1. 「積分は測度である」 既に知っているように (細かいことを無視して言い切れば)、

1 変数関数の積分は面積である。

つまり $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ を $f \geq 0$ なる関数とするとき、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= f \text{ のグラフと } x \text{ 軸ではさまれる図形の面積}\\ &= \{(x,y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \text{ の面積.}\end{aligned}$$

同様に

2 変数関数の積分は体積である。

つまり $A \subset \mathbf{R}^2$, $f\colon A \to \mathbf{R}$, $f \geq 0$ とするとき、

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= f \text{ のグラフと } xy \text{ 平面上の図形 } A \text{ ではさまれる立体図形の体積}\\ &= \{(x,y,z); (x,y) \in A, 0 \leq z \leq f(x,y)\} \text{ の体積.}\end{aligned}$$

(立体図形の絵が自分で描けるようになっておくこと！)

より一般に

n 変数関数の積分は $(n+1)$ 次元測度 (measure) である。

ここで、測度[1]というのは、長さ、面積、体積を一般化したものである。つまり

$$\begin{aligned}\text{長さ} &= 1 \text{ 次元測度},\\ \text{面積} &= 2 \text{ 次元測度},\\ \text{体積} &= 3 \text{ 次元測度}\end{aligned}$$

であって、4 次元以上の空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合に対しても測度を考える[2]。上の説明では最初に面積、体積が分かっているとして、「積分は面積である」、「積分は体積である」と

[1]測度のことを英語で measure というわけだが、ぜひ一度は英和辞典を引いてみることをお勧めする。
[2]最近では、分数次元も使われるようになった。いわゆる fractal 次元である。

説明したが、本当は面積や体積も数学的に定義する必要がある。実はこの講義では、最初に積分を定義して、それを用いて $\mathbf{R}^n$ の部分集合の測度 (その特別の場合として面積、体積がある) を定義する。反対に先に (積分を用いずに) 測度を定義して、それから積分を定義することも可能である。

結局は、

積分について考えることは測度について考えることであり、
どちらかを先に定義すれば、他方はもう一方からすぐ定義できる。

2. 「積分は和に似ている」 より正確には

積分は Riemann 和の極限として定義する

というべきである[3]。このことから、

積分 $\displaystyle\int$ の性質の多くは和 $\sum$ の性質によく似ている。

例えば

(1) (線形性)

$$\int_A \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int_A f(x)\,dx + \mu \int_A g(x)\,dx.$$

(2) (順序の保存) $f \le g$ on A ならば

$$\int_A f(x)\,dx \le \int_A g(x)\,dx.$$

(3)

$$\left|\int_A f(x)\,dx\right| \le \int_A |f(x)|\;dx.$$

(4) $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ならば

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{A_1} f(x)\,dx + \int_{A_2} f(x)\,dx.$$

そもそも、積分を表す記号 $\displaystyle\int$ も、数列の和を表すギリシャ文字 Σ も、ともに "sum" の頭文字 'S' に由来する。

ここでは、1 変数関数の積分の定義を見てみよう。例えば $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ なる場合に、f の $[a,b]$ における積分の定義は次のようにする。まず

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

[3]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866, ドイツの Breselenz に生まれ、イタリアの Selasca にて没する) は 19 世紀の大数学者である。様々な業績があるが、連続とは限らない関数の積分に、初めて明確な定義を与えた[4] (これは彼の業績の中では小粒な方かもしれない)。彼の流儀の積分は Riemann 積分と呼ばれる。Fourier 級数の研究がきっかけだった。

となる数列 $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$ を**区間** $[a,b]$ **の分割**と呼ぶ。区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$ と条件

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を満たす点列 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ に対して、f の **Riemann 和** $S(\Delta, \xi)$ を

$$S(\Delta, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

で定める。**分割の幅**を 0 に近づけるとき、すなわち

$$|\Delta| := \max_{i=1,\cdots,n} (x_i - x_{i-1}) \to 0$$

とするとき、$S(\Delta, \xi)$ が極限をもつならば、f は $[a,b]$ で (**Riemann**) **積分可能**であるといい、その極限を f の $[a,b]$ での (**Riemann**) **積分**と呼び

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx \quad \text{または} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

で表す。

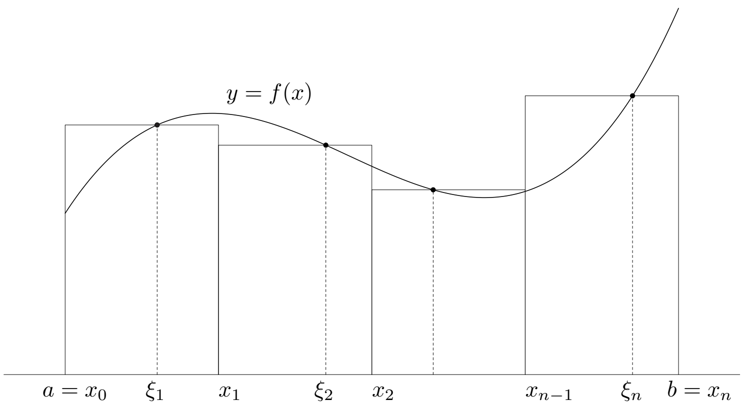


図 1: 長方形の面積の和が $S(\Delta, \xi)$ となる

参考のため、面積の定義も見てみよう。有界な平面図形 A に対して、座標軸に平行な格子線による格子を考え[5]、

$$A \text{ の}\textbf{内面積} := \lim_{\text{格子の幅} \to 0} A \text{ の中に含まれる小区間の面積の和}$$
$$A \text{ の}\textbf{外面積} := \lim_{\text{格子の幅} \to 0} A \text{ と交わりを持つ小区間の面積の和}$$

として、

$$A \text{ の内面積} = A \text{ の外面積}$$

[5]本当は図を描くべきところですね。すみません。

となった場合に、「A は**面積を持つ**」あるいは「A は 2 次元 **Jordan 可測集合** (**Jordan measurable set**) である」といい

$$A \text{ の面積} := A \text{ の内面積} \quad (= A \text{ の外面積})$$

と定義する。

なお、積分と和の類似性で理解しやすいものとしては、次の **Fubini の定理**が重要である。

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{[a,b]}\left(\int_{[c,d]} f(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \int_{[c,d]}\left(\int_{[a,b]} f(x,y)\,dx\right)dy.\end{aligned}$$

(これは「体積 = 軸に垂直な平面による断面積の積分」と解釈することも出来る。) この定理によれば、多変数関数の積分は、1 変数関数の積分を繰り返して行う (**累次積分**とか**重複積分**と呼ばれる) ことによって計算できることになる。1 変数関数の積分の計算法はもう既に知っている。

3. **「積分は微分と深い関係にある」** 既に

1 変数関数に関しては微分と積分は互いに他と逆の演算である

ことは知っている。具体的には

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

あるいは

$$\int_a^b F'(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

などの定理 (**微分積分学の基本定理**と呼ばれる) が成り立つ。これから

1 変数関数の定積分は被積分関数の原始関数を見つければ計算できる

という計算術が導かれるし、非常に重要な応用が豊富にある**部分積分法**

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

も、直接の系である (積の微分法の公式 $(fg)' = f'g + fg'$ を積分すれば得られる)。

多変数関数の場合にも、この微分積分学の基本定理に相当するものはあるが、第 2 部 (ベクトル解析) に分類されることになるので、ここでは説明を省略する。

微分との関係で、もう一つ重要なものに、**変数変換の公式**がある。これは 1 次元の場合には、(細かい仮定は省いて)

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{ただし} \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta)$$

というものであるが、多次元の場合には

$$\int_D f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du = \int_\Omega f(x)\,dx, \quad \Omega = \varphi(D)$$

と一般化される。

第1章　多変数関数の積分 (重積分)

この章では、多変数関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ (Ω は $\mathbf{R}^n$ の部分集合) の積分

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \iint\cdots\int_\Omega f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

を定義し、その基本的な性質を論じることを目標とする。

特に $n = 2$ の場合の $\displaystyle\iint_\Omega f(x, y)\ \,dx\,dy$ を二重積分 (double integral), $n = 3$ の場合の $\displaystyle\iiint_\Omega f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ を三重積分 (triple integral) と呼ぶが、総称として「重積分」 (double integral) という言葉を使う。

1.1　$\mathbf{R}^n$ の閉方体上の積分

1.1.1　閉方体の分割と上限和・下限和

$\mathbf{R}^n$ の有界閉区間を $\mathbf{R}^n$ の**閉方体**(へいほうたい)と呼ぶことにする。つまり $\mathbf{R}^n$ の閉方体とは、 $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $\cdots$, $a_n < b_n$ なる $2n$ 個の実数 a_i, b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を用いて、

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] := \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n; a_i \le x_i \le b_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

と表される $\mathbf{R}^n$ の部分集合である。

例えば $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ の閉方体とは、$a < b$ なる 2 つの実数 a, b を用いて

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}; a \le x \le b\},$$

と表される線分のこと、 $\mathbf{R}^2$ の閉方体とは、$a < b$, $c < d$ なる 4 つの実数 a, b, c, d を用いて

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

と表される長方形のことである。

この節の目標は $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A の上で定義された有界な関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ の A における (A 上の) 積分

$$\int_A f(x)\,dx$$

を定義することである。

定義 1.1.1 (1 次元の閉方体の分割) 1 次元閉方体 $A = [a, b]$ に対して、

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b$$

を満たす数列 $\{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ を、A の**小閉方体への分割**と呼ぶ。A の小閉方体への分割 $\Delta = \{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ があるとき、

(i) $A_j := [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ を分割 Δ の**小閉方体**と呼ぶ。

(ii) $|\Delta| := \max_{j=1,2,\cdots,\ell}(x_j - x_{j-1})$ を分割 Δ の**幅**と呼ぶ。

(iii) 各 x_j を Δ の**分点**と呼ぶ。

例 1.1.2 $A = [0, 1]$ とする。自然数 ℓ に対して、

$$x_j = \frac{j}{\ell} \quad (j = 0, 1, \cdots, \ell)$$

とおくと、$\Delta := \{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ は、A の小閉方体への分割となる。このとき $|\Delta| = \dfrac{1}{\ell}$. ■

この $\mathbf{R}$ の閉方体の分割を用いて、$n \geq 2$ の場合の $\mathbf{R}^n$ の閉方体の分割が定義される。$n = 2$ の場合で説明する ($n \geq 3$ の場合も同様である)。

定義 1.1.3 (2 次元の閉方体の分割) $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ を $\mathbf{R}^2$ の閉方体とする。$\mathbf{R}$ の閉方体 $[a_i, b_i]$ の分割 Δ_i $(i = 1, 2)$ を組にしたもの $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$ を A の小閉方体への分割と呼ぶ。つまり、

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b_1, \quad a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2$$

なる点列 $\Delta_1 = \{x_j\}_{j=0,1,\cdots,\ell}$, $\Delta_2 = \{y_k\}_{k=0,1,\cdots,m}$ の組 $\Delta := (\{x_j\}_{j=0,1,\cdots,\ell}, \{y_k\}_{k=0,1,\cdots,m})$ を A の小閉方体への分割という。このとき

(i) $A_{jk} := [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell,\ k = 1, 2, \cdots, m)$ を分割 Δ の小閉方体と呼ぶ。

(ii) $|\Delta| := \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$ を分割 Δ の幅と呼ぶ。

最終的には、かなり一般の図形の Jordan 測度を定義することになるが、まずは「四角い」図形の Jordan 測度を “常識的に” 定義しよう。

定義 1.1.4 (閉方体の Jordan 測度) $\mathbf{R}^n$ の閉方体

$$A=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$$

の n **次元 Jordan 測度**(ジョルダン そくど) (n**-dimensional Jordan measure**) を

$$(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$$

と定め、記号 $\mu_n(A)$ または $\mu(A)$ で表す:

$$\mu_n(A)=\mu(A):=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n).$$

1 次元 Jordan 測度は長さ (length)、 2 次元 Jordan 測度は面積 (area)、3 次元 Jordan 測度は体積 (volume) になっていることが分かる。すなわち Jordan 測度というものは長さ、面積、体積の拡張概念である。ここでは閉方体に対してのみ Jordan 測度を定義したが、後でより一般の図形に対して Jordan 測度を定義する。

補題 1.1.5 (ばらして面積を足すと、全体の面積と等しい) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、Δ を A の小閉方体への分割、$\{A_j\}_{j=1,2,\cdots,\ell}$ を Δ のすべての小閉方体とするとき、

$$\mu(A)=\sum_{j=1}^{\ell}\mu(A_j).$$

証明　明らかであろう。(多次元の場合に実際に証明を書くと結構面倒であるが、本質的なことではないし、事実自体は直観的には明らかだから証明は略する。) ■

定義 1.1.6 (下限和、上限和) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界関数、Δ を A の小閉方体への分割、$\{A_j\}_{j=1,2,\cdots,\ell}$ を Δ のすべての小閉方体とするとき、f の Δ に関する**下限和** $L(f,A,\Delta)$, f の Δ に関する**上限和** $U(f,A,\Delta)$ を次式で定義する:

$$L(f,A,\Delta):=\sum_{j=1}^{\ell}\inf_{x\in A_j}f(x)\,\mu(A_j),\quad U(f,A,\Delta):=\sum_{j=1}^{\ell}\sup_{x\in A_j}f(x)\,\mu(A_j). \tag{1.1}$$

注意 1.1.7 (記号に関するコメント) $\inf\limits_{x\in S}f(x)$ は $\inf\{f(x);x\in S\}$ とも書ける。inf に馴染みが薄い人は、当面連続関数のみ考えることにして、最小値と思って読めばよい (なるべく早く inf の復習をすること)。同様に $\sup\limits_{x\in S}f(x)=\sup\{f(x);x\in S\}$ で、こちらは最大値もどきである。■

練習問題 1　$A=[0,1]$, $f(x)=x$, $\Delta=\{j/N\}_{j=0}^N$ とするとき、$U(f,A,\Delta)$, $L(f,A,\Delta)$ を求めよ。(**答**: $U(f,A,\Delta)=(N+1)/(2N)$, $L(f,A,\Delta)=(N-1)/(2N)$. $N\to\infty$ とするときの極限がともに 1/2 になることに注目。) ■

練習問題 2 $A = [0,1]\times[0,1]$, $f(x,y) = x^2y^2$, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$, $\Delta_1 = \{j/N\}_{j=0}^N$, $\Delta_2 = \{j/N\}_{j=0}^N$ とするとき、$U(f,A,\Delta)$, $L(f,A,\Delta)$ を求めよ。■

要するに、下限和は下からの近似、上限和は上からの近似である。一般に "inf $\le$ sup" であるから、明らかに

$$L(f,A,\Delta) \le U(f,A,\Delta)$$

が成り立つ。分割を「細かくすると」近似の程度は上がる (下限和は大きくなり、上限和は小さくなる) と予想されるが、これについては次項できちんと扱う。

1.1.2 分割の細分

定義 1.1.8 (1 次元の閉方体の分割の細分) A を $\mathbf{R}$ の閉方体、Δ, Δ' を A の小閉方体への分割とする。このとき、

$$\Delta' \text{ が } \Delta \text{ の}\textbf{細分}\ (\text{さいぶん}) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \{\Delta'\text{の分点}\} \supset \{\Delta\text{の分点}\}$$

と定義し、このことを

$$\Delta' \succcurlyeq \Delta$$

と表す。

例 1.1.9 $A = [0,1]$, $\Delta = \left\{\dfrac{j}{2};\ j = 0,1,2\right\}$, $\Delta' = \left\{\dfrac{j}{4};\ j = 0,1,\cdots,4\right\}$, $\Delta'' = \left\{\dfrac{j}{6};\ j = 0,1,\cdots,6\right\}$ とすると、

$$\Delta' \succcurlyeq \Delta, \quad \Delta'' \succcurlyeq \Delta.$$

しかし、

$$\Delta'' \not\succcurlyeq \Delta', \quad \Delta' \not\succcurlyeq \Delta''.$$

つまり Δ', Δ'' はどちらがより細かいとも言えない。■

1 次元の閉方体の分割の細分を用いて、一般の n 次元の閉方体の分割の細分が定義されるが、簡単のため、ここでは $n = 2$ の場合に説明する。

定義 1.1.10 (2 次元の閉方体の分割の細分) A を $\mathbf{R}^2$ の閉方体、$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$, $\Delta' = (\Delta_1', \Delta_2')$ を A の小閉方体への分割とする。このとき、

$$\Delta' \text{ が } \Delta \text{ の細分} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \Delta_1' \text{ は } \Delta_1 \text{ の細分かつ } \Delta_2' \text{ は } \Delta_2 \text{ の細分}$$

と定義し、このことを

$$\Delta' \succcurlyeq \Delta$$

と表す。

注意 1.1.11 一つの閉方体 A の分割全体の集合 $\mathcal{P}(A)$ は、関係 $\succcurlyeq$ で半順序集合になる (全順序ではない)。つまり次の 3 つが成立する。

(i) $\forall \Delta \in \mathcal{P}(A)$ に対して $\Delta \succcurlyeq \Delta$.

(ii) $\forall \Delta \in \mathcal{P}(A), \forall \Delta' \in \mathcal{P}(A)$ に対して $\Delta \succcurlyeq \Delta'$ かつ $\Delta' \succcurlyeq \Delta \Longrightarrow \Delta = \Delta'$.

(iii) $\forall \Delta \in \mathcal{P}(A), \forall \Delta' \in \mathcal{P}(A), \forall \Delta'' \in \mathcal{P}(A)$ に対して $\Delta \succcurlyeq \Delta'$ かつ $\Delta' \succcurlyeq \Delta'' \Longrightarrow \Delta \succcurlyeq \Delta''$. ■

補題 1.1.12 (共通細分の存在) A を $\mathbf{R}$ の閉方体、Δ, Δ' を A の小閉方体への分割とするとき、$\exists \Delta''$: A の分割 s.t. $\Delta'' \succcurlyeq \Delta$ かつ $\Delta'' \succcurlyeq \Delta'$.

証明　分割 Δ'' を

$$\{\Delta'' の分点\} = \{\Delta の分点\} \cup \{\Delta' の分点\}$$

となるように定めればよい (つまり Δ, Δ' の分点を合わせて、並べ変えたものを分点全体とするような分割を Δ'' とする)。■

この補助定理の Δ'' を Δ, Δ' の **共通細分**と呼ぶ。

例 1.1.13 $\Delta = \{j/2\}_{j=0}^{2}$, $\Delta' = \{j/3\}_{j=0}^{3}$ の共通細分を上の補助定理の証明のようにして求めると $\Delta'' = \{0, 1/3, 1/2, 2/3, 1\}$. ■

命題 1.1.14 (2 次元の閉方体の分割の共通細分の存在) A を $\mathbf{R}^2$ の閉方体、Δ, Δ' を A の小閉方体への分割とするとき、$\exists \Delta''$: A の分割 s.t. $\Delta'' \succcurlyeq \Delta, \Delta'' \succcurlyeq \Delta'$.

証明は省略する (明らかであろう)。これらの結果は図を描いて説明するのが良いかもしれない。

命題 1.1.15 (分割が細かいほど下限和は大きく、上限和は小さくなる) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数、Δ, Δ' は A の小閉方体への分割で、$\Delta' \succcurlyeq \Delta$ が成り立つとする。このとき

$$L(f, A, \Delta) \le L(f, A, \Delta'), \quad U(f, A, \Delta') \le U(f, A, \Delta).$$

証明　(図を描くべし) Δ の各小閉方体 B は何個かの Δ' の小閉方体 $B_1, B_2, \cdots, B_\ell$ に分割される。このとき

$$\mu(B) = \mu(B_1) + \mu(B_2) + \cdots + \mu(B_\ell).$$

一方 $B \supset B_i$ より $\inf_{x \in B} f(x) \le \inf_{x \in B_i} f(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$ であるから、

$$\begin{aligned}
\inf_{x \in B} f(x)\mu(B) &= \inf_{x \in B} f(x) \cdot (\mu(B_1) + \mu(B_2) + \cdots + \mu(B_\ell)) \\
&= \inf_{x \in B} f(x)\mu(B_1) + \inf_{x \in B} f(x)\mu(B_2) + \cdots + \inf_{x \in B} f(x)\mu(B_\ell) \\
&\le \inf_{x \in B_1} f(x)\mu(B_1) + \inf_{x \in B_2} f(x)\mu(B_2) + \cdots + \inf_{x \in B_\ell} f(x)\mu(B_\ell).
\end{aligned}$$

Δ のすべての小閉方体 B に対して、この両辺の和を取ると

$$L(f, A, \Delta) \le L(f, A, \Delta').$$

上限和についての不等式もまったく同様に証明できる。■

命題 1.1.16 (下限和は必ず上限和以下である) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数、 Δ, Δ' は A の小閉方体への分割とするとき

$$L(f, A, \Delta) \le U(f, A, \Delta').$$

証明　Δ'' を Δ, Δ' 共通の細分とすると、補助定理より

$$L(f, A, \Delta) \le L(f, A, \Delta''), \quad U(f, A, \Delta'') \le U(f, A, \Delta).$$

ところで一つの分割 Δ'' に関する下限和、上限和については大小関係

$$L(f, A, \Delta'') \le U(f, A, \Delta'')$$

は明らかであるから結果が従う。■

この証明を見ると、細分という概念のありがたみが分かってくる。

1.1.3　下積分, 上積分, 積分可能性, 積分の定義

定義 1.1.17 (有界関数の閉方体上の下積分、上積分) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f の A 上の**下積分**(かせきぶん) (不足積分, lower integral) $L(f, A)$, f の A 上の**上積分**(じょうせきぶん) (過剰積分, upper integral) $U(f, A)$ を次式で定める:

$$L(f, A) := \sup_{\Delta \in \mathcal{P}(A)} L(f, A, \Delta) \qquad (\text{下限和の上限が下積分}),$$
$$U(f, A) := \inf_{\Delta \in \mathcal{P}(A)} U(f, A, \Delta) \qquad (\text{上限和の下限が上積分}).$$

ただし $\mathcal{P}(A)$ で A の小閉方体への分割全体の集合を表す。

注意 1.1.18 (1) 上積分を $\overline{\int}_A f(x)\,dx$, 下積分を $\underline{\int}_A f(x)\,dx$ で表すこともある。

(2) 上の命題 1.1.16 より、A の任意の 2 つの分割 Δ, Δ' に対して、

$$U(f, A, \Delta) \ge L(f, A, \Delta')$$

であるが、すべての分割 Δ に関する下限を取ると

$$U(f, A) \ge L(f, A, \Delta').$$

特に $U(f, A)$ は有限であることが分かる。次にすべての Δ' に関する上限を取ると

$$U(f, A) \ge L(f, A). \tag{1.2}$$

これから $L(f, A)$ も有限であることと、「上積分 $\ge$ 下積分」が分かる。■

素朴に考えると、上積分と下積分は常に一致すると思えるかもしれないが、すぐ後の例 1.1.22 で見るように、それは誤りである。そこで、上積分と下積分が一致するとき、積分可能であると言うことにする。

定義 1.1.19 (閉方体上の Riemann 積分の定義) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f が A で**積分可能** (**可積分**（かせきぶん）, **integrable**, **summable**) であるとは、

$$U(f,A) = L(f,A)$$

が成り立つこと、すなわち f の A 上の下積分と上積分が一致することをいう。このとき、この共通値 $L(f,A)$ のことを f の A 上の**積分** (**integral**) と呼び、

$$\int_A f(x)\,dx, \quad \iint\cdots\int_A f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n, \quad \int_A f$$

などの記号で表す。

注意 1.1.20 (1) 1 次元の場合、

$$\int_a^b f(x)\,dx := \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,dx & (a<b) \\ 0 & (a=b) \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f(x)\,dx & (a>b) \end{cases}$$

と定義する。これが高等学校以来使ってきた積分の大学数学流の定義である。

(2) $n \geq 2$ のとき、多変数であることを強調する意味で、(n) **重積分**（じゅうせきぶん） (**double integral**) と呼ぶことが多い。

(3) $A = [a,b]\times[c,d]$ のとき、$\displaystyle\int_A f(x)\ dx$ を $\displaystyle\iint_A f(x,y)\ dx\,dy$, $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ dx\,dy$, $\displaystyle\iint_{\substack{a\le x\le b\\ c\le y\le d}} f(x,y)\,dx\,dy$ とも表す。

(4) ここで定義した積分は詳しくは **Riemann**[1] **積分**と呼ばれる。**Lebesgue**（ルベーグ）[2] **積分**と呼ばれる、より一般の積分もあり、3 年生で学ぶ。性質の良い関数、積分範囲について二つの積分は一致する。

(5) f が A で積分可能であることを、「$\displaystyle\int_A f(x)\,dx$ が存在する」ということもある。

(6) 「f が A で積分可能」は英語では、“f is integrable (summable) on A” であり、これを「f は A で可積分」とか「f は A 上積分可能」、「f は A 上可積分」と訳すことも多い。

[1] Riemann (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866, 現在ドイツにある Breselenz に生まれ、イタリアの Selasca にて没する) は「関数の三角級数による表現の可能性について」 (1854, Habilitation (教授資格論文)) で連続とは限らない有界関数の積分の定義を提唱した。

[2] Henri Léon Lebesgue (1875–1941, フランスの Beauvais に生まれ、Paris にて没する)。「積分、長さ、面積」 (1902), 「積分と原始関数」 (1904) で Lebesgue 積分を確立した。

これらは読む場合には問題ないが、音声の上では「カセキブン」、「ジョウセキブン」という音が「下積分」や「上積分 ($U(f,A)$ の意味の)」と混同しやすいので、この講義では意識的に使わないように心掛けている。■

参考 1.1.1 (Lebesgue 積分) Lebesgue 積分の方がより性質の悪い関数、積分範囲を扱うことが出来る (例えば、すぐ後で紹介する無理数と有理数で場合分けした関数も、Lebesgue 積分としては積分可能になる)。さらに項別積分などの極限と積分の順序交換が比較的楽にできるという長所を持つ。もともと積分の定義が深く研究されるようになったのは、Fourier 級数などの解析学上の問題がきっかけである。「任意の関数は、積分を用いて定義される Fourier 係数で作られた Fourier 級数で表現できる」という言明を正当化する過程で、関数の定義、積分の定義を突き詰めて考える必要が生じた。なお、Lebesgue 積分について独習したい人には、志賀 [12], 新井 [1]、授業の参考書としては伊藤 [2]、歴史的なところに興味がある人には、もちろんルベーグの著作 (例えば [34])、それと見過ごされやすそうな[3]吉田 [31] を勧める。■

例 1.1.21 (定数関数は任意の閉方体上で積分可能である) $f\colon A\to\mathbf{R}$ が定数関数 $f(x)\equiv c$ ならば、f は A 上積分可能で、$\displaystyle\int_A f(x)\,dx = c\,\mu(A)$. 実際 A の任意の分割 Δ に対して、Δ の小閉方体全体を $\{A_j\}_{j=1,2,\cdots,\ell}$ とすると、任意の j に対して

$$\sup_{x\in A_j} f(x) = \inf_{x\in A_j} f(x) = c$$

であるから、

$$L(f,A,\Delta) = U(f,A,\Delta) = \sum_{j=1}^{\ell} c\mu(A_j) = c\sum_{j=1}^{\ell}\mu(A_j) = c\,\mu(A).$$

ゆえに

$$L(f,A) = U(f,A) = c\,\mu(A)$$

である。よって f は A で積分可能で、

$$\int_A f(x)\,dx = c\,\mu(A).\blacksquare$$

例 1.1.22 (積分可能でない関数の例 (Dirichlet の関数)) $A=[0,1]$, $f\colon A\to\mathbf{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x\in A\cap\mathbf{Q}) \\ 0 & (x\in A\setminus\mathbf{Q}) \end{cases}$$

で定めると、A の任意の分割 Δ に対して $L(f,A,\Delta)=0$, $U(f,A,\Delta)=1$ であることが容易に分かるから、 $L(f,A)=0$, $U(f,A)=1$. ゆえに f は A で積分可能ではない。■

1.1.4 連続関数の積分可能性

以下しばらく**どういう場合に積分可能か?**という問題を考える。

[3]吉田 [31] は、書名に「積分」も「測度」も「実解析」もないが、まぎれもなく Lebesgue 積分の良質の参考書である。

命題 1.1.23 (積分可能であるための必要十分条件) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、

$$f \text{ が } A \text{ で積分可能} \iff (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \Delta\colon A \text{ の分割})\ \text{s.t. } U(f,A,\Delta) - L(f,A,\Delta) \le \varepsilon.$$

証明　A の小閉方体への分割全体を $\mathcal{P}(A)$ と書くことにする。

$$\begin{aligned} U(f,A) - L(f,A) &= \inf_{\Delta \in \mathcal{P}(A)} U(f,A,\Delta) - \sup_{\Delta' \in \mathcal{P}(A)} L(f,A,\Delta') \\ &= \inf_{\Delta,\Delta' \in \mathcal{P}(A)} \left(U(f,A,\Delta) - L(f,A,\Delta')\right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f \text{ が } A \text{ で積分可能} &\iff U(f,A) = L(f,A) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta, \Delta' \in \mathcal{P}(A) \quad \text{s.t.} \quad U(f,A,\Delta) - L(f,A,\Delta') < \varepsilon. \end{aligned}$$

これは

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in \mathcal{P}(A) \quad \text{s.t.} \quad U(f,A,\Delta) - L(f,A,\Delta) < \varepsilon$$

と同値である ($\Longleftarrow$ は明らかである (Δ' として、Δ を取れば良い)。$\Longrightarrow$ は、Δ と Δ' の共通の細分を新たに Δ とすればよい。) ■

与えられた関数が積分可能であるための、具体的な十分条件としては「関数が連続である」というのがある[4]。これを次に示そう (1.3 節で、より一般化したシャープな定理を紹介する)。

定理 1.1.24 (閉方体上の連続関数は積分可能である, Cauchy (1823), Heine (1874)) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$ を連続関数とするとき、f は A で積分可能である。

証明　A は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるから (コンパクト集合であり)、その上で定義された連続関数 f は次の性質を持つ。

(a) f は A で最大値と最小値を持つ (特に有界である)。

(b) f は A で一様連続である[5]。

特に後者の方から

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \forall x' \in A \quad |x - x'| \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \le \varepsilon/\mu(A).$$

そこで Δ を A の分割で $|\Delta| < \delta/\sqrt{n}$ なるものとすると、Δ のすべての小閉方体 A_j ($j = 1, 2, \cdots, \ell$) について、「$x, x' \in A_j$ ならば $|x - x'| \le \delta$」が成り立つので $|f(x) - f(x')| \le \varepsilon/\mu(A)$ となることに注意すると

$$0 \le \sup_{x \in A_j} f(x) - \inf_{x \in A_j} f(x) \le \frac{\varepsilon}{\mu(A)}.$$

[4] 1 変数関数の積分では、「閉区間上の連続関数は積分可能である」という定理は、かなり満足の行く結果であったが、多変数関数の積分では満足しにくい (後の Jordan 可測集合上の積分のところで現れる f の 0 拡張 $\widetilde{f}$ は、たとえ f が連続であっても連続とは限らない場合が多いので)。

[5] 付録 C も参照せよ。

各辺に $\mu(A_j)$ をかけて和を取ると、

$$0 \le \sum_{j=1}^{\ell} \sup_{x\in A_j} f(x)\mu(A_j) - \sum_{j=1}^{\ell} \inf_{x\in A_j} f(x)\mu(A_j) \le \frac{\varepsilon}{\mu(A)} \sum_{j=1}^{\ell} \mu(A_j).$$

すなわち

$$0 \le U(f,A,\Delta) - L(f,A,\Delta) \le \varepsilon.$$

これは f が A で積分可能であることを示している。■

1.1.5 積分の基本的な性質, Riemann 和

余談 1.1.1 Riemann 積分を定義するのに、この講義では上積分、下積分を用いたが、以下で定義する Riemann 和を用いる流儀もある。二つの方法には一長一短がある。前者は早く積分の定義にたどりつけるという利点があるが、後者は定義までたどり着けば、積分の多くの性質の証明が見通し良くなる[6]という利点がある。■

命題 1.1.25 (積分の基本的な性質) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A \to \mathbf{R}$, $g\colon A \to \mathbf{R}$ は A で積分可能な有界関数とするとき、次の (1)–(4) が成り立つ。

(1) $\alpha f + \beta g$ も A で積分可能で

$$\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_A f(x)\,dx + \beta \int_A g(x)\,dx$$

(2) A 上で $f \ge g$ が成り立っていれば

$$\int_A f(x)\,dx \ge \int_A g(x)\,dx.$$

(3) $|f|$ も A で積分可能で

$$\left| \int_A f(x)\,dx \right| \le \int_A |f(x)|\,dx.$$

(4) A を 2 個の小閉方体 A_1, A_2 に分割するとき、f は A_1, A_2 のいずれの上でも積分可能であって、

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{A_1} f(x)\,dx + \int_{A_2} f(x)\,dx.$$

証明　とりあえず全部証明するが、(3) を除くと、次に説明する Riemann 和を使って積分を特徴づけておけば明らかである (和 $\sum$ の持っている性質であるから) ので、省略しても構わないであろう。

(1) $\forall \varepsilon > 0$ に対して、上積分、下積分の定義から、

$$\exists \Delta_1 \in \mathcal{P}(A) \quad \text{s.t.} \quad L(f,A) - \varepsilon \le L(f,A,\Delta_1),$$

$$\exists \Delta_2 \in \mathcal{P}(A) \quad \text{s.t.} \quad L(g,A) - \varepsilon \le L(g,A,\Delta_2),$$

[6]それ以外に、無限次元空間に値を持つ関数の積分への拡張が可能などの長所も嬉しい。

$$\exists \Delta_3 \in \mathcal{P}(A) \quad \text{s.t.} \quad U(f,A,\Delta_3) \le U(f,A) + \varepsilon,$$
$$\exists \Delta_4 \in \mathcal{P}(A) \quad \text{s.t.} \quad U(g,A,\Delta_4) \le U(g,A) + \varepsilon.$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 の共通の細分 Δ を取ると、

$$L(f,A) - \varepsilon \le L(f,A,\Delta_1) \le L(f,A,\Delta),$$
$$L(g,A) - \varepsilon \le L(g,A,\Delta_2) \le L(g,A,\Delta),$$
$$U(f,A,\Delta) \le U(f,A,\Delta_3) \le U(f,A) + \varepsilon,$$
$$U(g,A,\Delta) \le U(f,A,\Delta_4) \le U(g,A) + \varepsilon.$$

加えると

$$L(f,A)+L(g,A)-2\varepsilon \le L(f,A,\Delta)+L(g,A,\Delta), \quad U(f,A,\Delta)+U(g,A,\Delta) \le U(f,A)+U(g,A)+2\varepsilon.$$

よくある $\inf f + \inf g \le \inf(f+g)$, $\sup(f+g) \le \sup f + \sup g$ から

$$L(f,A,\Delta) + L(g,A,\Delta) \le L(f+g,A,\Delta), \quad U(f+g,A,\Delta) \le U(f,A,\Delta) + U(g,A,\Delta).$$

もちろん $L(f+g,A,\Delta) \le U(f+g,A,\Delta)$. まとめると

$$L(f,A) + L(g,A) - 2\varepsilon \le L(f+g,A,\Delta) \le U(f+g,A,\Delta) \le U(f,A) + U(g,A) + 2\varepsilon.$$

f と g が積分可能であるから、

$$\int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx - 2\varepsilon \le L(f+g,A,\Delta) \le U(f+g,A,\Delta) \le \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx.$$

特に

$$|U(f+g,A,\Delta) - L(f+g,A,\Delta)| \le 4\varepsilon.$$

ゆえに $f+g$ は A で積分可能である。そして

$$L(f+g,A,\Delta) \le L(f+g,A) = \int_A (f+g)(x)dx = U(f+g,A) \le U(f+g,A,\Delta)$$

より

$$\left| \int_A (f+g)(x)dx - \left(\int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx \right) \right| \le 4\varepsilon.$$

(2) $\forall \Delta \in \mathcal{P}(A)$ に対して、

$$U(f,A,\Delta) \ge U(g,A,\Delta), \quad L(f,A,\Delta) \ge L(g,A,\Delta)$$

であるから、

$$U(f,A) \ge U(g,A), \quad L(f,A) \ge L(g,A).$$

特に f と g が A で積分可能であるとき、

$$\int_A f(x)\,dx = U(f,A) \ge U(g,A) = \int_A g(x)\,dx.$$

(3) f が A で積分可能であるという仮定から、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、A の閉方体への分割 Δ で、

$$U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) \leq \varepsilon$$

を満たすものが存在する。Δ のすべての小閉方体を $\{A_j\}_{j=1}^{\ell}$ とする。各 A_j について、

$$\sup_{x \in A_j} |f(x)| - \inf_{x \in A_j} |f(x)| \leq \sup_{x \in A_j} f(x) - \inf_{x \in A_j} f(x)$$

が成り立つ。両辺に $\mu_n(A_j)$ をかけて、すべての j について加えると、

$$U(|f|, A, \Delta) - L(|f|, A, \Delta) \leq U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta).$$

以上から

$$U(|f|, A, \Delta) - L(|f|, A, \Delta) \leq \varepsilon.$$

命題 1.1.23 によれば、これは $|f|$ が A で積分可能であることを示している。

各 $x \in A$ に対して、$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ が成り立つので、これを A で積分して

$$-\int_A |f(x)| dx \leq \int_A f(x)\ dx \leq \int_A |f(x)| dx.$$

ゆえに

$$\left| \int_A f(x)\ dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

(4) $n = 1$ として証明する。$A = [a, b]$ とおく。$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists \Delta = \{x_j\}_{j=0}^{\ell}$ s.t.

$$U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) \leq \varepsilon.$$

$A_1 = [a, c],\ A_2 = [c, b]$ として、x_j の中に c がなければそれを加えて Δ' を作ると、

$$U(f, A, \Delta') - L(f, A, \Delta') \leq \varepsilon.$$

Δ' の分点のうち c 以下のものを集めて Δ_1, c 以上のものを集めて Δ_2 を作ると、それぞれ A_1, A_2 の分割になり、

$$U(f, A, \Delta') = U(f, A_1, \Delta_1) + U(f, A, \Delta_2), \quad L(f, A, \Delta') = L(f, A_1, \Delta_1) + L(f, A, \Delta_2).$$

ゆえに

$$U(f, A_1, \Delta_1) + U(f, A, \Delta_2) - L(f, A_1, \Delta_1) + L(f, A, \Delta_2) \leq \varepsilon.$$

すなわち

$$[U(f, A_1, \Delta_1) - L(f, A_1, \Delta_1)] + [U(f, A_2, \Delta_2) - L(f, A_2, \Delta_2)] \leq \varepsilon$$

となるから、

$$U(f, A_1, \Delta_1) - L(f, A_1, \Delta_1) \leq \varepsilon, \quad U(f, A_2, \Delta_2) - L(f, A_2, \Delta_2) \leq \varepsilon.$$

ゆえに f は A_1 と A_2 の双方で積分可能である。

Riemann 和

定義 1.1.26 (Riemann 和) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、 $f\colon A \to \mathbf{R}$ を有界な関数、 Δ を A の小閉方体への分割で、$\{A_j\}_{j=1}^{\ell}$ を Δ のすべての小閉方体とする。$\{\xi_j\}_{j=1}^{\ell}$ を $\xi_j \in A_j$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ なる点列とするとき、

$$S(f, A, \Delta, \{\xi_j\}) := \sum_{j=1}^{\ell} f(\xi_j)\mu(A_j)$$

を f の (Δ, $\{\xi_j\}$ に関する) **Riemann 和**と呼ぶ。

注意 1.1.27 (Riemann 和と上限和・下限和との関係) A, f, Δ を決めたとき、任意の $\{\xi_j\}_{j=1}^{\ell}$ (ただし $\xi_j \in A_j$ を満たすとする) に対して、

$$\inf_{x\in A_j} f(x) \le f(\xi_j) \le \sup_{x\in A_j} f(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, \ell)$$

であるから、$\mu(A_j)$ をかけて和を取ることにより

$$L(f, A, \Delta) \le S(f, A, \Delta, \{\xi_j\}) \le U(f, A, \Delta)$$

が得られる。

一方、f, A, Δ を与えたとき、上限和 $U(f, A, \Delta)$ にいくらでも近い Riemann 和が存在する。すなわち

$$(\forall\varepsilon > 0) \left(\exists\{\xi_j\}_{j=1}^{\ell}\right) \quad |U(f, A, \Delta) - S(f, A, \Delta, \{\xi_j\})| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

実際、各 $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ に対して

$$0 \le \sup_{x\in A_j} f(x) - f(\xi_j) \le \frac{\varepsilon}{\mu(A)}$$

を満すような ξ_j を取れば、

$$\begin{aligned} 0 \le U(f, A, \Delta) - S(f, A, \Delta, \{\xi_j\}) &= \sum_{j=1}^{\ell} \sup_{x\in A_j} f(x)\mu(A_j) - \sum_{j=1}^{\ell} f(\xi_j)\mu(A_j) \\ &\le \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sup_{x\in A_j} f(x) - f(\xi_j)\right)\mu(A_j) \le \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\varepsilon}{\mu(A)}\mu(A_j) = \varepsilon. \end{aligned}$$

同様に下限和 $L(f, A, \Delta)$ にいくらでも近い Riemann 和が存在する。 ■

この Riemann 和を用いて、我々が既に定義した積分と同等のものが定義出来る (次の命題の条件 (ii) を見よ)。

命題 1.1.28 A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界な関数とするとき、次の 2 条件は互いに同値である。

(i) f は A で積分可能である。

(ii) 分割の幅を 0 に近付けると Riemann 和は一定値に収束する。すなわち $(\exists S\in\mathbf{R})$ $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ $(\forall\Delta\colon A$ の分割, $|\Delta|<\delta)$ $(\forall\{\xi_j\}_{j=1}^{\ell}\colon \xi_j\in A_j\ (j=1,2,\cdots,\ell)$. ここで $\{A_j\}$ は Δ のすべての小閉方体$)$

$$|S-S(f,A,\Delta,\{\xi_j\})|<\varepsilon.$$

さらに $S=\displaystyle\int_A f(x)\,dx$ が成り立つ。

この命題の証明には、有名な次の Darboux(ダルブー)[7] の定理を使う。

補題 1.1.29 (Darboux, 1875) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界関数とするとき、$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $(\forall\Delta\colon A$ の分割, $|\Delta|\le\delta)$

$$|U(f,A,\Delta)-U(f,A)|\le\varepsilon,\quad |L(f,A,\Delta)-L(f,A)|\le\varepsilon.$$

この事実を

$$\lim_{|\Delta|\to 0}U(f,A,\Delta)=U(f,A),\quad \lim_{|\Delta|\to 0}L(f,A,\Delta)=L(f,A)$$

と書く本もある (厳密に言うと記号の濫用である)。

証明　簡単のため $n=1$ の場合に証明するが、一般の n に対して証明を書くのも難しくはない (記号が繁雑になりがちで面倒ではあるが[8])。また上積分についてのみ証明する (下積分でも同様に証明できる)。

$M:=\sup\limits_A f$, $\mu:=\inf\limits_A f$ とおく。$M=\mu$ のとき (つまり f が定数関数のとき)、主張は明らかであるから、以下では $M>\mu$ の場合を考える。

(1) $U(f,A)$ の定義から、$\forall\varepsilon>0$ 対して、A の分割 $\Delta_\varepsilon=\{z_0,z_1,\cdots,z_\ell\}$ で

$$U(f,A)\le U(f,A,\Delta_\varepsilon)\le U(f,A)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4}$$

が成り立つものが存在する[9]。これを 1 つ固定する。

(2) $\eta:=\min\limits_{1\le j\le\ell}(z_j-z_{j-1})$ とおき、$|\Delta|<\eta$ なる A の任意の分割 $\Delta=\{x_0,x_1,\cdots,x_k\}$ を考える。各小閉方体 $[x_{j-1},x_j]$ の中には、Δ_ε の分点は高々一つしか入らない。実際、つねに $z_k-z_{k-1}\ge\eta>|\Delta|\ge x_j-x_{j-1}$ であるから、z_{k-1}, z_k が同時に $[x_{j-1},x_j]$ に属することはない。

[7] Jean Gaston Darboux (1842–1917, フランスの Nimes で生まれ、Paris にて没する). Riemann 積分の上限和、下限和を定義し、有名な Darboux の定理を得る (1875)。

[8] ここに記した証明は、多くの本で採用されているものであるが、「何となく気に入らない」と言った人がいて、別証明を作ったことがある。付録 F.2 を見よ。

[9] 実際、$\forall j$, $\forall k$ について、$z_k-z_{k-1}\ge\eta\ge|\Delta|\ge x_j-x_{j-1}$ であるから、z_{k-1}, z_k が共に $[x_{j-1},x_j]$ に入ることがあり得ない。

(3) $\widetilde{\Delta}_\varepsilon$ を Δ_ε と Δ の分点を合わせて作った分割とする。まず細分であることから、

$$U(f,A,\widetilde{\Delta}_\varepsilon) \le U(f,A,\Delta_\varepsilon). \tag{1.5}$$

Δ の小区間 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ について考える。

(a) Δ_ε の分点が I_j に入らない、また入っても端点である場合。I_j は分割 $\widetilde{\Delta}_\varepsilon$ の小閉方体でもある。

(b) Δ_ε の分点 z_k が I_j の内部に入る場合。I_j は $\widetilde{\Delta}_\varepsilon$ では

$$I_{j,L} = [x_{j-1}, z_k], \quad I_{j,R} = [z_k, x_j]$$

と分割される。$U(f,A,\Delta)$ の定義式中の

$$\sup_{x\in I_j} f(x)(x_j - x_{j-1})$$

は $U(f,A,\Delta_\varepsilon)$ の定義式では

$$\sup_{x\in I_{j,L}} f(x)(z_k - x_{j-1}) + \sup_{x\in I_{j,R}} f(x)(x_j - z_k)$$

に置き換えられる。

よって、

$$\begin{aligned}
U(f,A,\Delta) - U(f,A,\widetilde{\Delta}_\varepsilon) &= \sum_{k:\exists j \ \text{s.t.}\ z_k\in I_j^\circ} \left[(\sup_{I_j} f - \sup_{I_{j,L}} f)(z_k - x_{j-1}) + (\sup_{I_j} f - \sup_{I_{j,R}} f)(x_j - z_k)\right] \\
&\le \sum_{k:\exists j \ \text{s.t.}\ z_k\in I_j^\circ} (M-\mu)(z_k - x_{j-1} + x_j - z_k) \\
&= \sum_{k:\exists j \ \text{s.t.}\ z_k\in I_j^\circ} (M-\mu)(x_j - x_{j-1}).
\end{aligned}$$

$|x_j - x_{j-1}| \le |\Delta|$ であること、また $z_k \in I_j^\circ \cap \Delta_\varepsilon$ となる z_k は、多くとも ℓ 個であることから、

$$U(f,A,\Delta) - U(f,A,\widetilde{\Delta}_\varepsilon) \le \ell(M-\mu)|\Delta|.$$

ゆえに

$$\delta := \min\left\{\eta, \frac{\varepsilon}{2\ell(M-\mu)}\right\}$$

で δ を定めると、$|\Delta| < \delta$ ならば

$$U(f,A,\Delta) - U(f,A,\widetilde{\Delta}_\varepsilon) \le \varepsilon/2. \tag{1.6}$$

以上をまとめて

$$\begin{aligned}
0 \le U(f,A,\Delta) - U(f,A) &= \Big(U(f,A,\Delta) - U(f,A,\widetilde{\Delta}_\varepsilon)\Big) + \Big(U(f,A,\widetilde{\Delta}_\varepsilon) - U(f,A,\Delta_\varepsilon)\Big) \\
&\quad + (U(f,A,\Delta_\varepsilon) - U(f,A)) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

これは $\lim_{|\Delta|\to\varepsilon} U(f,A,\Delta) = U(f,A)$ を意味している。■

命題 1.1.28 の証明

(i)⟹(ii) 上の注意に書いたように

$$L(f,A,\Delta) \le S(f,A,\Delta,\{\xi_j\}) \le U(f,A,\Delta)$$

であるが、ここで $|\Delta|$ を 0 に近付けると、Darboux の定理と仮定 (i) から、両端が $\int_A f(x)dx$ に収束する。従って、Riemann 和も $\int_A f(x)\,dx$ に収束する。

(ii)⟹(i) 与えられた $\varepsilon > 0$ に対して、仮定の条件の $\delta > 0$ を取ると、$|\Delta| < \delta$ をみたす任意の分割 Δ に対して、

$$|S - U(f,A,\Delta)| \le \varepsilon, \quad |S - L(f,A,\Delta)| \le \varepsilon$$

が成り立つ ($U(f,A,\Delta)$, $L(f,A,\Delta)$ にいくらでも近い Riemann 和が存在するから)。ゆえに $U(f,A,\Delta) - L(f,A,\Delta) \le 2\varepsilon$. 命題 1.1.23 より f は A で積分可能である。 ■

1.2 Jordan 可測集合上の積分

最初にクイズから。「$\mathbf{R}^3$ の図形の体積を求める機械があるとき、それを用いて $\mathbf{R}^2$ 内の図形 Ω の面積を求めるには、どうすればよいか？」— Ω を「台」にして、高さ 1 のケーキを作って、その体積を求めればよい。

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 Ω の Jordan 測度 (ジョルダン[10]測度) とは、Ω の**特性関数** (**characteristic function**) χ_Ω の積分である。(ある空間の部分集合の特性関数とは、その部分集合上で 1, 補集合上で 0 となる関数のことである。つまり Ω の特性関数とは、

$$\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega) \end{cases}$$

で定義される関数 χ_Ω である。しばしば Ω の**定義関数**とも呼ばれる。)

任意の Ω が Jordan 測度を持つとは限らない。そこで次のように定義をする。

定義 1.2.1 (Jordan 可測集合) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界集合とする。
Ω が n **次元 Jordan 可測** (**n-dimensional Jordan measurable**) とは、積分 $\int_A \chi_\Omega(x)\,dx$ が存在することと定義する。ここで

(1) A は $\Omega \subset A$ となる閉方体。

(2) χ_Ω は Ω の特性関数。すなわち $\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$ である。

このとき

$$\mu_n(\Omega) = \mu(\Omega) := \int_A \chi_\Omega(x)\,dx$$

を Ω の n **次元 Jordan 測度** (n-**dimensional Jordan measure**) と呼ぶ。

[10] Camille Jordan (1838–1922).

例 1.2.2 (Jordan 可測でない集合) 例 1.1.22 の f は $\Omega := [0,1] \cap \mathbf{Q}$ の特性関数である。f は $[0,1]$ で積分可能でないので、Ω は Jordan 可測ではない。 ■

注意 1.2.3 上の定義は A の取り方によらない (いわゆる well-defined である)。つまり $\Omega \subset B$ なる、もう一つの閉方体 B があったとき、

$$\chi_\Omega \text{ が } A \text{ で積分可能} \iff \chi_\Omega \text{ が } B \text{ で積分可能}$$

であり、これが成り立つとき

$$\int_A \chi_\Omega(x)\,dx = \int_B \chi_\Omega(x)\,dx.$$

問 注意で述べた事実を証明せよ (どちらも $\displaystyle\int_{A\cap B} \chi_\Omega(x)\,dx$ に等しい)。

注意 1.2.4 閉方体については、既にその n 次元 Jordan 測度を定義してある。Ω が閉方体である場合、上の定義 1.2.1 で、二重定義が生じるようだが、これは問題ない。それは Ω が閉方体 $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ であるならば、次の (1), (2) が成り立つからである。

(1) Ω は n 次元 Jordan 可測集合である。

(2) $\displaystyle\int_A \chi_\Omega(x)\,dx = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$. ■

問 この注意の (1), (2) が成り立つことを示せ。

注意 1.2.5 (Jordan 可測性の図形的な意味) $\mathbf{R}^n$ の有界な部分集合 Ω に対して、$\Omega \subset A$ となる閉方体 A を一つ取るとき、

$$\Omega \text{ が Jordan 可測} \iff \chi_\Omega \text{ が } A \text{ で積分可能} \iff U(\chi_\Omega, A) = L(\chi_\Omega, A).$$

また定義より

$$U(\chi_\Omega, A) = \inf_\Delta U(\chi_\Omega, A, \Delta), \quad L(\chi_\Omega, A) = \sup_\Delta L(\chi_\Omega, A)$$

であることと、A の分割 Δ に属する小閉方体全体を A_j $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ とするとき、

$$U(\chi_\Omega, A, \Delta) = \sum_{A_j \cap \Omega \neq \emptyset} \mu(A_j) = \Omega \text{ と共通部分を持つ } A_j \text{ の Jordan 測度の和},$$

$$L(\chi_\Omega, A, \Delta) = \sum_{A_j \subset \Omega} \mu(A_j) = \Omega \text{ に含まれる } A_j \text{ の Jordan 測度の和}$$

であることに注意すると、Jordan 可測性の意味が明瞭になるであろう (ぜひとも図が欲しい…)。$U(\chi_\Omega, A)$ を Ω の **Jordan 外測度**, $L(\chi_\Omega, A)$ を Ω の **Jordan 内測度**という。 ■

定義 1.2.6 (Jordan 可測集合上の積分の定義, Dirichlet (1839)) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界で Jordan 可測な部分集合で、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は有界関数とする。このとき f が Ω で**積分可能** (または**可積分**) であるとは、$\overline{\Omega} \subset A^\circ$ なる $\mathbf{R}^n$ の閉方体 A を取って

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \in A \setminus \Omega) \end{cases}$$

で $\tilde{f}$ を定めるとき、$\tilde{f}$ が A で積分可能となることをいう。このとき f の Ω 上の**積分** $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ を

$$\int_\Omega f(x)\,dx := \int_A \tilde{f}(x)\,dx$$

で定める。

注意 1.2.7 この積分の定義によれば、$\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合の Jordan 測度 $\mu(\Omega)$ は

$$\int_\Omega 1\,dx \quad (\text{同じものを } \int_\Omega dx \text{ とも書く})$$

とも表せることになる。■

命題 1.2.8 (積分の基本的な性質) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, $g\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は Ω で積分可能な有界関数とするとき、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して、$\alpha f + \beta g$ も Ω で積分可能で

$$\int_\Omega (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_\Omega f(x)\,dx + \beta \int_\Omega g(x)\,dx$$

(2) Ω 上で $f \geq g$ が成り立っていれば

$$\int_\Omega f(x)\,dx \geq \int_\Omega g(x)\,dx.$$

(3) $|f|$ も Ω で積分可能で

$$\left|\int_\Omega f(x)\,dx\right| \leq \int_\Omega |f(x)|\,dx.$$

証明　命題 1.1.25 による。■

命題 1.1.25 (4) に対応しそうな

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x)\,dx = \int_{\Omega_2} f(x)\,dx + \int_{\Omega_1} f(x)\,dx - \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f(x)\,dx$$

は、後の命題 1.3.11 となる。

1.3 積分可能性と Joran 可測性、零集合

1.3.1 イントロ (ここだけ読んでもかなり役に立つ)

この節では、どういう Ω と f に対して積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が意味を持つか (f が Ω で積分可能であるか) を考える。

念のため、ここまでの話では、大前提として、Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は有界な関数と仮定してあることを思い出そう (後でそうでない場合「広義積分」を調べることになる)。

まず Ω については、Jordan 可測であるという条件をおくのが自然である (もっとも簡単と思われる $f \equiv 1$ の場合、つまり $\displaystyle\int_\Omega 1\,dx$ が存在するための必要十分条件であるので)。ところで、Ω が Jordan 可測というのは、早いハナシ、一体どういうことであろうか？この問について、この節で完全な答 (系 1.3.5 及び Jordan 零集合の判定法) を与えることが出来る。実際的な目的のためには、次の判定法が便利であろう。

> 有限個の連続関数のグラフ (ただし定義域は有界閉集合) で囲まれた有界集合は Jordan 可測である

例えば、$\mathbf{R}^2$ 内の有界な多角形や、$\mathbf{R}^3$ 内の有界な多面体は Jordan 可測である。

では、Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合とするとき、積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ が存在するための条件はどうか？この問に対しては、実は (ちょっと信じられないくらい) 完璧な答が存在する。それは、f の不連続点全体の集合が Lebesgue 零集合であることが必要十分、というもの (定理 1.3.4) である。新出の用語 “Lebesgue 零集合” の定義は以下に与えるが、それを使わなくても (知らなくても)[11]、特に f が連続ならば積分可能、つまり

> Ω が有界 Jordan 可測、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ が有界連続ならば、$\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ は存在する

という命題だけでも相当に役に立つ。例えば計算練習問題に現れる積分の積分可能性を保証するには、大抵の場合これで十分である。

余談 1.3.1 初めて重積分を学ぶとき、その値をどうやって計算するかを学ぶことに時間がかかるため、積分可能性の問題にはあまり注力できない現実があると思われる。筆者は重積分を初めて学んだ際に、計算問題を解きつつ、「これで良いのはどうしてか？」釈然としないために居心地の悪い時を過ごした。この講義でも、この節に書かれた内容を詳しく説明する余裕はない。しかし筆者は美しい内容であると信じているので (現時点で美しくは書けていないかもしれないが)、あえて書き記しておく。■

1.3.2 零集合の定義と重要な結果の紹介

どういう場合に集合が Jordan 可測になるか、関数が積分可能になるか、判定法を述べるために、「Jordan 零集合」、「Lebesgue 零集合」という二つの概念を導入する。

[11] (念のため) 連続ならば不連続点全体の集合は空集合であり、空集合は “もちろん” Lebesgue 零集合なので。

定義 1.3.1 (Jordan 零集合、Lebesgue 零集合) N を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする。

(1) N が **Jordan 零集合**であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、集合の有限列 $\{B_j\}_{j=1}^m$ で、

$$\text{各 } B_j \text{ は } \mathbf{R}^n \text{ の閉方体または空集合}, \quad N \subset \bigcup_{j=1}^m B_j, \quad \sum_{j=1}^m \mu_n(B_j) < \varepsilon$$

を満すものが存在することをいう。

(2) N が **Lebesgue 零集合**であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、集合列 $\{B_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ で、

$$\text{各 } B_j \text{ は } \mathbf{R}^n \text{ の閉方体または空集合}, \quad N \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_j, \quad \sum_{j=1}^\infty \mu_n(B_j) < \varepsilon$$

を満すものが存在することをいう。

問　平面上で次の各集合が Jordan 零集合であることを示せ。
(1) 1 点からなる集合 $\{a\}$　(2) 有限個の点からなる集合 $\{a_n\}_{n=1}^\ell$　(3) 原点と点 $(1,0)$ を結ぶ線分　(4) 原点と点 $(1,1)$ を結ぶ線分
(後でより一般の曲線が Jordan 零集合であることの証明を与えるが、どうやれば証明できるか、想像してみると良い。)

注意 1.3.2
- Jordan 零集合、Lebesgue 零集合の定義の中の「閉方体」という言葉を「開区間」で置き換えても同値である ($\sum_j \mu_n(B_j) < \varepsilon/2$ となる閉方体の列 $\{B_j\}$ を取ってから、B_j の各辺を $2^{1/n}$ 倍に長くした開区間を取ればよい)。
- Jordan 零集合は Lebesgue 零集合である。逆は真でないが (例は後述する)、コンパクトな Lebesgue 零集合は Jordan 零集合である (開区間で被覆するとき、有限部分被覆が存在するから)。■

次の命題の内容を理解すると頭がすっきりするであろうが、後の議論に必要不可欠というわけでもないので、急ぐときは証明を読むのを省略しても構わないであろう。

命題 1.3.3 (Jordan 零集合 = Jordan 測度が 0 の集合) N が $\mathbf{R}^n$ の部分集合であるとき、次の 2 条件は互いに同値である。

(i) N は Jordan 零集合である。

(ii) N は有界 Jordan 可測かつ $\mu_n(N) = 0$.

証明　最初に次のことを注意しておく。$N \subset A$ となる閉方体 A を取ったとき、

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} &\iff \chi_N \text{ は } A \text{ で積分可能で} \int_A \chi_N(x)\,dx = 0 \\
&\iff U(\chi_N, A) = L(\chi_N, A) = 0 \\
&\iff U(\chi_N, A) = 0.
\end{aligned}$$

実際、最後の $\Leftarrow$ は次のように証明できる。一般に $U(\chi_N, A) \geq L(\chi_N, A)$ であり、$\chi_N \geq 0$ より $L(\chi_N, A) \geq 0$ であるから、$U(\chi_N, A) = 0$ から $L(\chi_N, A) = 0$ が得られる。
[(ii)$\Longrightarrow$ (i) の証明] (ii) を仮定すると $U(\chi_N, A) = 0$ であるから、

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\Delta \in \mathcal{P}(A)) \quad U(\chi_N, A, \Delta) < \varepsilon.$$

ところで Δ のすべての小閉方体を $\{A_j\}_{j=1}^{\ell}$ とするとき、

$$U(\chi_N, A, \Delta) = \sum_{j=1}^{\ell} \sup_{x \in A_j} \chi_N(x)\mu_n(A_j) = \sum_{A_j \cap N \neq \emptyset} \mu_n(A_j).$$

$N \subset A = \bigcup_{j=1}^{\ell} A_j$ であるから、(N と交わらない A_j を抜いても変わらず)

$$N \subset \bigcup_{A_j \cap N \neq \emptyset} A_j, \qquad \sum_{A_j \cap N \neq \emptyset} \mu_n(A_j) = U(\chi_N, A, \Delta) < \varepsilon.$$

そこで $A_j \cap N \neq \emptyset$ を満たす A_j の全体を $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ とおけばよい。
[(i)$\Longrightarrow$ (ii) の証明] (i) を仮定する。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \quad \sum_{j=1}^{m} \mu_n(B_j) < \varepsilon$$

を満たす閉方体の有限列 $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ が存在する。

A の分割 Δ で、その小閉方体全体 $\{A_j\}_{j=1}^{\ell}$ で、各 B_j が構成できるようなものが取れる。(実際、例えば $n = 1$ のとき、$A = [a, b]$, $B_j = [\alpha_j, \beta_j]$ とすると、集合 $\{a, b, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_m, \beta_m\}$ を小さい順から並べたものを $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_\ell = b$ として、$\Delta := \{a_j\}_{j=0}^{\ell}$ とおけばよい。$n \geq 2$ でも同様である。) ..... このとき

$$U(\chi_N, A, \Delta) = \sum_{j=1}^{\ell} \sup_{x \in A_j} \chi_N(x)\mu_n(A_j) = \sum_{A_j \cap \Omega \neq \emptyset} \mu_n(A_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu_n(B_j) < \varepsilon$$

が成り立つ。これから $U(\chi_N, A) = 0$ が得られる。■

参考 1.3.1 (Lebesgue 零集合も Lebesgue 測度 0 として特徴づけられる) 実は Lebesgue による積分論では、Lebesgue 測度が定義され、$\mathbf{R}^n$ の任意の部分集合 N に対して、

$$N \text{ が Lebesgue 零集合} \iff N \text{ は Lebesgue 可測かつ } N \text{ の Lebesgue 測度は } 0$$

が成り立つ。■

Lebesgue 積分の創始者として有名な Henri Léon Lebesgue (1875–1941, フランスの Beauvais に生まれ、Paris にて没する) による、次の究極的な結果が本節のハイライトである。

定理 1.3.4 (Lebesgue, 1902) Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は有界関数とするとき、次の 2 条件は互いに同値である。

(i) f は Ω で積分可能である。

(ii) f の不連続点全体の集合は Lebesgue 零集合である。

この定理の証明は後に回す。「Lebesgue 零集合」という言葉は出て来るが、あくまで Riemann 積分に関する定理であり、Lebesgue の積分論・測度論は必要ないことに注意すべきである。

Jordan 可測性は、特性関数の積分可能性であったから、この定理の系として次が得られる。

系 1.3.5 (Jordan 可測性の判定) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界集合とするとき、次の 3 条件は互いに同値である。

(i) Ω は Jordan 可測である。

(ii) Ω の境界は Lebesgue 零集合である。

(iii) Ω の境界は Jordan 零集合である。

念のため: Ω の境界とは、$\partial\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n; \forall\varepsilon > 0\ B(x;\varepsilon)\cap\Omega \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad B(x;\varepsilon)\cap\Omega^c \neq \emptyset\}$ で定義される集合である。

証明 Ω の特性関数 $\chi_\Omega\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ の不連続点全体の集合は、$\partial\Omega$ に他ならない。定理から (i) と (ii) の同値性はすぐ得られる。一般に Jordan 零集合は Lebesgue 零集合であることから、(iii) $\Longrightarrow$ (ii) が得られる。$\partial\Omega$ は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合なのでコンパクトであることに注意すると、(ii) $\Longrightarrow$ (iii) も得られる。■

こうして、積分可能性、Jordan 可測性の判定は、Lebesgue 零集合、Jordan 零集合の判定に帰着されることが分かった。これらについては後でゆっくり調べていくが、とりあえず使いやすい命題を一つ紹介しておこう。

命題 1.3.6 (連続関数のグラフは Jordan 零集合) K は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbf{R}$ は連続とするとき、f のグラフ

$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)); x \in K\}$$

は $\mathbf{R}^{n+1}$ の Jordan 零集合である。

証明 (授業では、$K = [a,b]$ の場合に証明を与えるかも知れない (図を描くことで理解しやすくなるので)。それは以下に述べるものと本質的に同じである。)

K を含む閉方体 A を取る。

f はコンパクト集合 K 上の連続関数であるから、K 上一様連続である。ゆえに任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$(\forall x \in K)(\forall x' \in K : \|x - x'\| < \delta) \quad |f(x) - f(x')| \le \frac{\varepsilon}{\mu_n(A)}.$$

A の分割 Δ を、分割の幅 $|\Delta|$ が $\delta/\sqrt{n}$ より小さくなるように取る。Δ の小閉方体のうち、K と共通部分を持つもの全体を $\{A_j\}_{j=1}^m$ とする。このとき、$x \in K$ と $x' \in K$ が一つの A_j に属するならば $\|x - x'\| \le \sqrt{n}|\Delta| < \delta$ となるので、$|f(x) - f(x')| \le \varepsilon/\mu_n(A)$. 従って、幅が $\varepsilon/\mu_n(A)$ に等しい $\mathbf{R}$ の区間 I_j で、

$$\{(x, f(x)); x \in K \cap A_j\} \subset B_j, \quad B_j := A_j \times I_j$$

となるものが存在する。$\mu_{n+1}(B_j) = \mu_n(A_j)\varepsilon/\mu_n(A)$ であるので、

$$\sum_{j=1}^m \mu_{n+1}(B_j) = \sum_{j=1}^m \mu_n(A_j)\frac{\varepsilon}{\mu_n(A)} \le \varepsilon.$$

もちろん $\operatorname{graph} f \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ である。ゆえに $\operatorname{graph} f$ は Jordan 零集合である。■

この命題から、有限個の連続関数のグラフ (ただし定義域は有界閉集合とする) の合併で「囲まれた」[12]集合は、Jordan 可測であることが分かる。応用上現れる大抵の集合の Jordan 可測性は、この命題でカバーできる。

1.3.3 Jodan 零集合、Lebesgue 零集合、Jordan 可測集合の基本的性質

あわてないで基本的事項を積んでいこう。

Jordan 零集合の性質

命題 1.3.7 $\mathbf{R}^n$ において次の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) Jordan 零集合の部分集合は Jordan 零集合である。

(2) 2 つの Jordan 零集合の合併は Jordan 零集合である。

(3) 有限集合は Jordan 零集合である。

証明 定義から明らかである。■

命題 1.3.8 $n \geq 2$, $\varphi\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ を Lipschitz 連続な関数とするとき、$N := \varphi([a,b])$ は $\mathbf{R}^n$ の Jordan 零集合である。

証明 仮定から、ある $L \in \mathbf{R}$ が存在して、

$$\forall t, s \in [a,b] \quad \|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leq L|t-s|$$

が成り立つ。任意の自然数 N に対して、$[a,b]$ を N 等分してできた小閉区間を $I_1, \ldots, I_N$ とする。このとき、

$$(\forall k \in \{1, \ldots, N\}) \quad (\forall t, s \in I_k) \quad \|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leq \frac{L(b-a)}{N}.$$

特に $\varphi(I_k)$ は閉球 $\overline{B(\varphi(t_{k-1}); r)}$, $r := M(b-a)/N$ に含まれる。ゆえに 1 辺が $2r$ の n 次元立方体 A_k で $\varphi(I_k)$ は被覆できる。したがって、$\varphi([a,b]) = \bigcup_{k=1}^{N} \varphi(I_k)$ は、$\bigcup_{k=1}^{N} A_k$ で被覆され、

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) = N \times (2r)^n = \frac{[2M(b-a)]^n}{N^{n-1}}.$$

$n \geq 2$ と仮定したので、N を大きくすれば、この式の右辺はいくらでも小さくできる。■

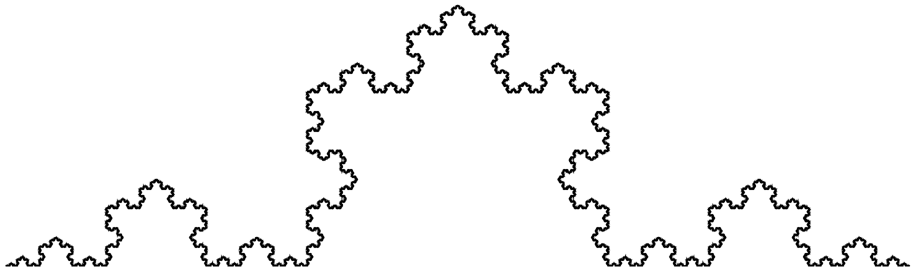
注意 1.3.9 • もちろん、φ が区分的 C^1 級ならば Lipschitz 条件を満たすので、区分的 C^1 級曲線の像 (跡) は Jordan 零集合である。

[12] 正確には、境界がグラフの合併になっている、ということ。

- 「長さを持つ曲線は Jordan 零集合」と一般化できると筆者は予想しているが、現在まだ証明を持っていない。

- もちろん $n \geq 2$ は必要である。$n = 1$ の場合、曲線の 1 次元 Jordan 測度 (長さ) は 0 にならないのが普通である。

- 単に φ が連続というだけでは $\varphi([a,b])$ が Jordan 零集合という結論は導けない。実際、連続写像 $\varphi\colon [0,1] \to \mathbf{R}^2$ で、$\varphi([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$ となるものが存在する (いわゆる **Peano 曲線** (1890), Hilbert 曲線 (1891))。



- **Koch 曲線**は長さを持たないが、その像は Jordan 零集合である (自己相似性に注意すると簡単に証明できる)。 ■

Jordan 可測集合の性質

合併集合の測度に関する次の命題は納得しやすいであろう。

命題 1.3.10 Ω_1, Ω_2 を $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合とするとき、$\Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2$, $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ も有界 Jordan 可測集合で、

$$\mu_n(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mu_n(\Omega_1) + \mu_n(\Omega_2) - \mu_n(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

証明 (系 1.3.5 を使うのは、少々大げさな証明だと思うのだが…)

$$U := \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad V := \Omega_1 \cap \Omega_2, \quad W := \Omega_1 \setminus \Omega_2$$

とおく。一般に ∂U, ∂V, ∂W のいずれも $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ に含まれる。Ω_1 と Ω_2 が Jordan 可測であれば、$\partial\Omega_1$ と $\partial\Omega_2$ は Jordan 零集合であり、∂U, ∂V, ∂W のいずれも Jordan 零集合となる。ゆえに U, V, W は Jordan 可測集合である。

$\Omega_1 \cup \Omega_2$ を含む閉方体 A を取る。一般に

$$\chi_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \chi_{\Omega_1} + \chi_{\Omega_2} - \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$$

が成り立つが、上で確認したように、どの関数も A で積分可能である。ゆえに

$$\int_A \chi_{\Omega_1 \cup \Omega_2}(x)\,dx = \int_A \chi_{\Omega_1}(x)\,dx + \int_A \chi_{\Omega_2}(x)\,dx - \int_A \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x)\,dx.$$

すなわち

$$\mu_n(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mu_n(\Omega_1) + \mu_n(\Omega_2) - \mu_n(\Omega_1 \cap \Omega_2). \blacksquare$$

命題 1.3.11 Ω_1, Ω_2 は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合であり、$f\colon \Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbf{R}$ は有界関数とするとき、次の (i), (ii) は互いに同値である。

(i) f は Ω_1, Ω_2 の両方で積分可能である。

(ii) f は $\Omega_1 \cup \Omega_2$ で積分可能である。

このとき、

$$\int_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,dx = \int_{\Omega_1} f(x)\,dx + \int_{\Omega_2} f(x)\,dx - \int_{\Omega_1\cap\Omega_2} f(x)\,dx.$$

特に $\Omega_1 \cap \Omega_2$ が Jordan 零集合である場合は

$$\int_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,dx = \int_{\Omega_1} f(x)\,dx + \int_{\Omega_2} f(x)\,dx.$$

証明 (i) と (ii) の同値性を示すには、f の不連続点の集合について、「Jordan 零集合の合併は Jordan 零集合」、「Jordan 零集合の部分集合は Jordan 零集合」という事実を用いればよい。

$\Omega_1 \cup \Omega_2$ を含む閉方体 A をとり、

$$\chi_{\Omega_1\cup\Omega_2}(x) = \chi_{\Omega_1}(x) + \chi_{\Omega_2}(x) - \chi_{\Omega_1\cap\Omega_2}(x) \quad (x \in A)$$

の両辺に f の零拡張 $\widetilde{f}(x)$ をかけてから、A で積分することで

$$\int_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,dx = \int_{\Omega_1} f(x)\,dx + \int_{\Omega_2} f(x)\,dx - \int_{\Omega_1\cap\Omega_2} f(x)\,dx$$

を得る。■

命題 1.3.12 Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合とするとき、内部 Ω° と閉包 $\overline{\Omega}$ も Jordan 可測集合で、

$$\mu_n(\Omega) = \mu_n(\Omega^\circ) = \mu_n(\overline{\Omega}).$$

証明 $\Omega \subset \overline{\Omega}$ より $\Omega^\circ \subset \left(\overline{\Omega}\right)^\circ$ であるから、

$$\partial\overline{\Omega} = \overline{\overline{\Omega}} \setminus \left(\overline{\Omega}\right)^\circ = \overline{\Omega} \setminus \left(\overline{\Omega}\right)^\circ \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ = \partial\Omega.$$

Ω が Jordan 可測であるから、$\partial\Omega$ は Jordan 零集合である。ゆえにそれより小さい $\partial\overline{\Omega}$ も Jordan 零集合であり、$\overline{\Omega}$ は Jordan 可測である。

同様に $\Omega^\circ \subset \Omega$ より $\overline{\Omega^\circ} \subset \overline{\Omega}$ であるから、

$$\partial\left(\Omega^\circ\right) = \overline{\Omega^\circ} \setminus \left(\Omega^\circ\right)^\circ = \overline{\Omega^\circ} \setminus \Omega^\circ \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ = \partial\Omega.$$

これから Ω° が Jordan 可測であることが分かる。

以上の議論の過程で、各集合の差の Jordan 測度が 0 であることも分かったので、$\mu_n(\Omega) = \mu_n\left(\overline{\Omega}\right) = \mu_n\left(\Omega^\circ\right)$. ■

なお、この命題の逆は成立しない。実際 $\Omega := [0,1] \cap \mathbf{Q}$ とするとき、Ω は Jordan 可測ではなく、$\overline{\Omega} = [0,1]$, $\Omega^\circ = \emptyset$ のいずれも Jordan 可測である。

Lebesgue 零集合の性質

Lebesgue 零集合とは、測度の和が任意に小さい閉方体の可算列で覆えるような集合のことで、直観的に言えば、やせた集合である。実際にやってみるとすぐに分かることだが、集合が Lebesgue 零集合であることの確認は大抵の場合かなり易しい。

命題 1.3.13 (Jordan 零集合と Lebesgue 零集合の関係) (1) $\mathbf{R}^n$ の任意の Jordan 零集合は Lebesgue 零集合である。(2) $\mathbf{R}^n$ の任意のコンパクト Lebesgue 零集合は Jordan 零集合である。

証明 (1) は明らかである。(2) は Jordan 零集合, Lebesgue 零集合の定義の中の「閉方体」を「開区間」でおきかえてもよいことに注意すれば、コンパクト集合の定義 (任意の開被覆は有限部分被覆を持つ) から明らかである。■

後で示すように、$\mathbf{Q}$ は Lebesgue 零集合であるが、Jordan 零集合ではないから、上の命題の (1) の逆は成り立たない。

命題 1.3.14 $\mathbf{R}^n$ において、次の (1)–(3) が成り立つ。

(1) Lebesgue 零集合の部分集合は Lebesgue 零集合である。

(2) 有限集合は Lebesgue 零集合である。

(3) 可算無限集合は Lebesgue 零集合である。特に $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ の Lebesgue 零集合である。

証明 (1), (2) は明らかである。(3) を $n=1$ の場合に示そう。N を可算無限集合 $\{x_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ とするとき、

$$B_j := \left[x_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, x_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right]$$

とおくと、$x_j \in B_j$ であるから $N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ であり、かつ $\mu_n(B_j) = \dfrac{\varepsilon}{2^j}$ であるから

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

空間次元 n が一般の場合も、$x_j \in B_j$ かつ $\mu_n(B_j) = \varepsilon/2^j$ を満たす閉方体 B_j が取れることは明らかであるから同じことである。■

上の命題の (3) を不思議に感じる人がいるだろうが (たとえば、有理数体 $\mathbf{Q}$ が面積の和がいくらでも小さい閉方体 (閉区間) の列で覆える！、次の命題はもっと驚くべきものである。

命題 1.3.15 (Lebesgue 零集合は可算無限個足しても Lebesgue 零集合) $\mathbf{R}^n$ において、可算個の Lebesgue 零集合の合併は Lebesgue 零集合である。

証明 $N = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ で、任意の $j \in \mathbf{N}$ に対して、N_j は Lebesgue 零集合であるとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、各 $j \in \mathbf{N}$ につき、N_j が Lebesgue 零集合であることから

$$N_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^{(j)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(B_k^{(j)}\right) \le \frac{\varepsilon}{2^j}$$

となる閉方体の列 $\{B_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ が取れる。このとき $B_k^{(j)}$ $(j,k=1,2,\dots)$ は可算個あり (自然数で番号づけできる[13])、

$$\sum_{j,k=1}^{\infty}\mu\left(B_k^{(j)}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k^{(j)})\le\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^j}=\varepsilon.$$

そしてもちろん $N\subset\displaystyle\bigcup_{j,k=1}^{\infty}B_k^{(j)}$. ゆえに N は Lebesgue 零集合である。■

1.3.4 定理 1.3.4 の証明

フォローするのは少々大変かもしれないが、定理 1.3.4 の証明を与える。

まず定義域が閉方体の場合から始めよう。

定理 1.3.16 (不連続点全体が Lebesgue 零集合 ⇔ 積分可能) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$f\colon A\to\mathbf{R}$ を有界関数、B を f の不連続点全体の集合、すなわち

$$B:=\{x\in A; f \text{ は } x \text{ で不連続}\}$$

とするとき、

$$f \text{ が } A \text{ で積分可能} \iff B \text{ は Lebesgue 零集合}.$$

証明

(⇐) (これは分かりやすい⋯) $\varepsilon>0$ とすると、B が Lebesgue 零集合であることから、次の条件を満たす $\mathbf{R}^n$ の開区間の列 $\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ が取れる:

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i \quad かつ \quad \sum_{i=1}^{\infty}\mu_n(U_i)\le\frac{\varepsilon}{4M},\quad M:=\sup_{x\in A}|f(x)|.$$

$\forall x\in A\setminus B$ に対して、f の x での連続性から、$\mathbf{R}^n$ の閉方体 V_x で

$$x\in V_x^\circ,\quad \sup_{y\in V_x}f(y)-\inf_{y\in V_x}f(y)<\frac{\varepsilon}{2\mu_n(A)}$$

なるものが取れる。このとき

$$\{U_i\}_{i=1}^{\infty}\cup\{V_x^\circ\}_{x\in A\setminus B}$$

は A の開被覆であるから、そのうちの有限個 $\{W_j\}_{j=1}^{k}$ を選んで A を覆うことが出来る (A は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるからコンパクトである[14])。

A の分割 Δ で、そのすべての小閉方体 $A_1,\dots,A_\ell$ の各々が上の開区間 W_j のどれかに含まれるようなものが取れる (後述の補題 1.3.17)。そうして

$$\mathcal{A}_1:=\Delta \text{ の小閉方体のうち、いずれかの } U_i \text{ に含まれるもの全体},$$
$$\mathcal{A}_2:=\Delta \text{ の小閉方体のうち、いずれかの } V_x^\circ \text{ に含まれるもの全体}$$

[13] 有理数体 $\mathbf{Q}$ が可算濃度であることの証明と同様である。
[14] C.2 の定理 C.2.1 を見よ。

とおくと、$\mathcal{A}_1 \bigcup \mathcal{A}_2$ に Δ のすべての小閉方体が含まれ、

$$\sum_{A_j \in \mathcal{A}_1} \left[\sup_{y \in A_j} f(y) - \inf_{y \in A_j} f(y)\right] \mu_n(A_j) \le 2M \sum_{A_j \in \mathcal{A}_1} \mu_n(A_j) \le 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{A_j \in \mathcal{A}_2} \left[\sup_{y \in A_j} f(y) - \inf_{y \in A_j} f(y)\right] \mu_n(A_j) \le \frac{\varepsilon}{2\mu_n(A)} \sum_{A_j \in \mathcal{A}_2} \mu_n(A_j) \le \frac{\varepsilon}{2\mu_n(A)} \cdot \mu_n(A) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

ゆえに

$$U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) = \sum_{j=1}^{\ell} \left[\sup_{y \in A_j} f(y) - \inf_{y \in A_j} f(y)\right] \mu_n(A_j) \le \varepsilon.$$

これは f が A で積分可能であることを示している。

(⇒)　f が A で積分可能であると仮定する。各 $a \in \Omega$ に対して、a における f の振幅と呼ばれる $o(f, a)$ を

$$o(f, a) := \lim_{\delta \downarrow 0} \left(\sup_{x \in B(a;\delta)} f(x) - \inf_{x \in B(a;\delta)} f(x)\right)$$

で定めると、

$$f \text{ が } a \text{ で不連続} \quad \Longleftrightarrow \quad o(f, a) > 0$$

が成り立つ。それゆえ

$$B_m := \left\{x \in A; o(f, x) \ge \frac{1}{m}\right\} \quad (m \in \mathbf{N})$$

とおくと $B = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ が成り立つ。ゆえに B が Lebesgue 零集合であることを示すには、各 B_m が Lebesgue 零集合であることを確かめれば十分である。

f は A で積分可能であるから、A の分割 Δ で、

$$U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) < \frac{\varepsilon}{m}$$

を満たすものが存在する。Δ に属するすべての小閉方体を $\{A_j\}_{j=1}^{\ell}$ とおく。また

$$\mathcal{A} := \left\{A_j; A_j^\circ \cap B_m \ne \emptyset\right\}$$

とおく。

各 $A_j \in \mathcal{A}$ に対して、$\exists x \in A_j^\circ \cap B_m$. 内部の定義から $\exists \delta > 0$ s.t. $B(x;\delta) \subset A_j$. これから

$$\sup_{y \in A_j} f(y) - \inf_{y \in A_j} f(y) \ge \sup_{y \in B(x;\delta)} f(y) - \inf_{y \in B(x;\delta)} f(y) \ge o(f, x) \ge \frac{1}{m}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} \sum_{A_j \in \mathcal{A}} \mu_n(A_j) &\le \sum_{A_j \in \mathcal{A}} \left(\sup_{y \in A_j} f(y) - \inf_{y \in A_j} f(y)\right) \mu_n(A_j) \\ &\le \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sup_{y \in A_j} f(y) - \inf_{y \in A_j} f(y)\right) \mu_n(A_j) = U(f, A, \Delta) - L(f, A, \Delta) < \frac{\varepsilon}{m}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{A_j \in \mathcal{A}} \mu_n(A_j) \le \varepsilon.$$

一方、明らかに $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\ell} \partial A_i$ は Jordan 零集合であるから、有限個の閉方体の列 $U_1, \cdots, U_k$ で

$$\bigcup_{i=1}^{\ell} \partial A_i \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j, \quad \sum_{j=1}^{k} \mu_n(U_j) < \varepsilon$$

を満たすものが取れる。

$\mathcal{A} \cup \{U_j\}_{j=1}^{k}$ は B_m を覆う (B_m をある A_j の内部に含まれる部分と、A_j の境界に含まれる部分に分けて考える)。そして

$$\sum_{A_j \in \mathcal{A}} \mu_n(A_j) + \sum_{j=1}^{k} \mu_n(U_j) < 2\varepsilon.$$

ゆえに B_m は Lebesgue 零集合である[15]。 ■

上の証明中で、次の補題を利用した[16]。

補題 1.3.17 (Lebesgue) A を $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$\{J_i\}_{i=1}^{m}$ を $\mathbf{R}^n$ の開区間による A の被覆とするとき、A の分割 Δ で、Δ に属する任意の小閉方体 A_j は、ある J_i に含まれるようなものが存在する。

証明　各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して、

$$f_i(x) := \inf_{y \in J_i^c} |x - y| \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

とおくと、$f_i \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は連続で、

$$x \in J_i \iff f_i(x) > 0$$

が成り立つ。

$$f(x) := \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

とおくと、$f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は連続であり、A 上到るところ $f > 0$ が成り立つ (実際、$\forall x \in A$ に対して、$\exists j \in \{1, \ldots, m\}$ s.t. $x \in J_i$. このとき $f_j(x) > 0$ であるから、$f(x) \ge f_j(x) > 0$.)。

A はコンパクトであるから、$r := \min_{x \in A} f(x)$ とおくと $r > 0$ である。Δ を $|\Delta| < \dfrac{r}{\sqrt{n}}$ を満たす任意の分割とする。

A_j を Δ の任意の小閉方体とする。A_j の点 x を任意に選ぶ。$f(x) = f_i(x)$ となる i を取ると、

$$\inf_{y \in J_i^c} |x - y| = f_i(x) = f(x) \ge r > (A_j \text{ の直径})$$

[15] 実は B_m は Jordan 零集合であるが、B は可算和なので Jordan 零集合とは限らず、Lebesgue 零集合としか言えない。

[16] スピヴァック [17] には何も書いていなくて、授業中に立ち往生したことがある。杉浦先生の本を見たら、ちゃんと Lebesgue の名前つきの補題として証明が書いてあった。

となるので、$A_j \subset J_i$ が成り立つ。■

系 1.3.5 の証明の中で、χ_Ω の不連続点全体は $\partial\Omega$ に等しいということを使っていた。念のため、証明を与えておく。

補題 1.3.18 (境界 = 特性関数の不連続点の全体) Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界集合とするとき、$\overline{\Omega} \subset A^\circ$ となる閉方体 A を取ると、

$$\partial\Omega = \{x \in A; \chi_\Omega \text{ は } x \text{ で不連続}\}.$$

証明

(a) x が Ω の内点とすると

$$x \in U \subset \Omega$$

となる開区間 U が取れるが、このとき $\chi_\Omega = 1$ on U. よって x で χ_Ω は連続である。

(b) x が Ω の外点とすると

$$x \in U \subset \mathbf{R}^n \setminus \Omega$$

となる開区間 U が取れるが、このとき $\chi_\Omega = 0$ on U. よって x で χ_Ω は連続である。

(c) x が Ω の境界点、すなわち $x \in \partial\Omega$ とすると、$x \in U$ となる任意の開区間 U は Ω の内部とも外部とも共通点を持つ。

- $y_1 \in U \cap \Omega^\circ$ とすると $\chi_\Omega(y_1) = 1$.
- $y_2 \in U \cap (\mathbf{R}^n \setminus \Omega)^\circ$ とすると $\chi_\Omega(y_2) = 0$.

これから χ_Ω は x で不連続であることが分かる。

以上より B は χ_Ω の不連続点全体の集合であることが分かった。■

この系の証明と同様の論法で、定理 1.3.4 の証明が得られる。

定理 1.3.4 の証明 $\Omega \subset A$ となる閉方体 A を取り、f の A への零拡張を $\widetilde{f}\colon A \to \mathbf{R}$ とおく。$f, \widetilde{f}$ の不連続点全体の集合をそれぞれ $D, \widetilde{D}$ とおくとき、

$$D \subset \widetilde{D} \subset (D \cup \partial\Omega)$$

が証明できる (直観的には明らかであろう)。Ω が Jordan 可測という仮定より、$\partial\Omega$ は Lebesgue 零集合であり (系 1.3.5 を用いた)、上に紹介した Lebesgue 零集合の性質 (命題 1.3.14) から

$$\begin{aligned} f \text{ が } \Omega \text{ で積分可能} &\iff \widetilde{f} \text{ が } A \text{ で積分可能} \\ &\iff \widetilde{D} \text{ が Lebesgue 零集合} \\ &\iff D \text{ が Lebesgue 零集合} \end{aligned}$$

が得られる。■

1.3.5 Jordan 零集合は積分に影響ない

せっかく、零集合についてきちんと調べておいたので、積分の極意 (というと大げさだが、重要な性質) を一つ説明しておこう。

補題 1.3.19 N が $\mathbf{R}^n$ の Jordan 零集合ならば、その閉包 $\overline{N}$ も Jordan 零集合である。

証明 N が Jordan 零集合であるとすると、定義から、任意の $\varepsilon>0$ に対して、有限個の閉方体 $B_1,\dots,B_m$ で

$$N\subset\bigcup_{j=1}^m B_j,\quad \sum_{j=1}^m \mu_n(B_j)<\varepsilon$$

を満たすものが存在する。このとき、$\bigcup_{j=1}^m B_j$ が閉集合であることに注意すると、

$$\overline{N}\subset\overline{\bigcup_{j=1}^m B_j}=\bigcup_{j=1}^m B_j.$$

これから $\overline{N}$ も Jordan 零集合であることが分かる。■

注意 1.3.20 この補題は、Lebesgue 零集合には一般化できない。実際 $\Omega=[0,1]\cap\mathbf{Q}$ は Lebesgue 零集合であるが、$\overline{\Omega}=[0,1]$ は Lebesgue 零集合ではない。■

命題 1.3.21 Ω が $\mathbf{R}^n$ の Jordan 零集合ならば、任意の有界関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ は Ω で積分可能で $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx=0.$

証明 $\widetilde{f}\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ を

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & (x\in\Omega)\\ 0 & (x\notin\Omega)\end{cases}$$

で定義するとき、$\widetilde{f}$ の不連続点全体は $\overline{\Omega}$ に含まれる。(実際、Ω の任意の外点 x_0 に対して、x_0 の十分小さな近傍 V は Ω の外部に含まれるので、$\widetilde{f}(x)=0$ $(x\in V)$ となり、$\widetilde{f}$ は x_0 で連続であることが分かる。ゆえに $\widetilde{f}$ の不連続点は、Ω の外部の補集合、すなわち $\overline{\Omega}$ に含まれる。)

Ω が Jordan 零集合であることから、$\overline{\Omega}$ も Joradn 零集合である (補題 1.3.19 による)。

ゆえに、$\Omega\subset A$ となる任意の閉方体 A 上で $\widetilde{f}$ は積分可能である。そして

$$\left|\int_\Omega f(x)\,dx\right|\le\int_\Omega|f(x)|dx\le\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\int_\Omega dx=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\mu_n(\Omega)=0$$

から $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx=0$ が得られる。■

命題 1.3.22 (零集合上の差は積分に影響ない) A, B は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合で、差が Jordan 零集合、すなわち $\mu_n((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = 0$ を満たすとする。また有界関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$, $g\colon B \to \mathbf{R}$ は、$A \cap B$ 上での値が一致するとする。このとき、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

(1) $\mu_n(A) = \mu_n(B)$.

(2) f が A で積分可能 $\iff$ g が B で積分可能.

(3) f が A で積分可能ならば(または「g が B で積分可能ならば」)、$\displaystyle\int_A f(x)\,dx = \int_B g(x)\,dx$.

証明 $C := A \cap B$, $A' := A \setminus B$, $B' := B \setminus A$ とおくとき、C は有界 Jordan 可測集合であり、A' と B' は Jordan 零集合、また $A = C \cup A'$, $C \cap A' = \emptyset$, $B = C \cup B'$, $C \cap B' = \emptyset$ が成り立つので、

$$\mu_n(A) = \mu_n(C) + \mu_n(A') = \mu_n(C) + 0 = \mu_n(C),$$
$$\mu_n(B) = \mu_n(C) + \mu_n(B') = \mu_n(C) + 0 = \mu_n(C)$$

より $\mu_n(A) = \mu_n(B)$. 同様にして

$$\int_A f(x)\,dx = \int_C f(x)\,dx + \int_{A'} f(x)\,dx = \int_C f(x)\,dx + 0 = \int_C f(x)\,dx,$$
$$\int_B g(x)\,dx = \int_C g(x)\,dx + \int_{B'} g(x)\,dx = \int_C g(x)\,dx + 0 = \int_C g(x)\,dx$$

であり、$C = A \cap B$ 上で $f = g$ であるから

$$\int_C f(x)\,dx = \int_C g(x)\,dx.$$

ゆえに

$$\int_A f(x)\,dx = \int_B g(x)\,dx. \blacksquare$$

系 1.3.23 A は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、B は $\mathbf{R}^n$ の Jordan 零集合、$f\colon A \cup B \to \mathbf{R}$ を有界関数とするとき、f が A, $A \cup B$, $A \setminus B$ のいずれかで積分可能ならば、他のいずれでも積分可能で

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_{A \setminus B} f(x)\,dx.$$

1.3.6 メモ

位相空間における閉包、内部について、

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{1.7}$$

$$(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cap B^\circ, \quad A \cap B^\circ = A^\circ \cap B^\circ \tag{1.8}$$

という公式が成り立つ。

$\partial(A\cup B)$, $\partial(A\cap B)$ が気になったが、多分

$$\partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B,\quad \partial(A\cap B)\subset\partial A\cup\partial B \tag{1.9}$$

くらいしか言えないと思う。これを証明すること自体は簡単である。

問 (1.7), (1.8), (1.9) を証明せよ。

1.4 Fubini の定理

1.4.1 イントロダクション

これまで重積分の定義と基本的な性質を学んできた。これから具体的に値を計算するために役立つ事項を学ぶ。

ここでは、そのうちの一つ、重積分を 1 次元の積分の繰り返し（累次積分、重複積分という）に変形する「Fubini の定理」を説明する。

まず Fubini の定理の直観的な意味を二通りの方法で示す。

積分は和の極限であるという立場からの理解

平面上で 1 以上 10 以下の整数を座標に持つ点の集合 A を考える。

$$A=\{(i,j)\in\mathbf{Z}^2;1\le i,j\le 10\}.$$

各 $(i,j)\in A$ の上に i^2j という値がおいてあるとして、それらすべての和はいくらになるか？

これは別に難しくはなく、次のように計算できる。

$$\sum_{(i,j)\in A}i^2j=\sum_{i=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{10}i^2j\right)=\sum_{i=1}^{10}i^2\frac{10\cdot 11}{2}=\frac{10\cdot 11\cdot(2\cdot 10+1)}{6}\cdot 55=21175.$$

この計算で使った原理を、一般的に表すと

$$\sum_{\substack{a\le i\le b\\ c\le j\le d}}a_{ij}=\sum_{i=a}^{b}\left(\sum_{j=c}^{d}a_{ij}\right)$$

となる。つまり

「二重級数の和は、(一重) 級数の和の計算を繰り返すことで計算出来る」

ということである。積分に関してもまったく同様のこと (Fubini の定理) が成り立つ。後で Fubini の定理の証明を学ぶが、それは上の級数の計算と本質的に同等である。

積分は測度であるという立場からの理解

2 次元の閉方体 $A = [a, b] \times [c, d]$ 上の積分で説明する。いま $f\colon A \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbf{R}$, $f \geq 0$ (on A) とするとき、f の A 上の積分

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$$

を考える。すでに述べたように、これは集合

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

の体積である。ところで、高等学校の数学で

「立体図形の体積は、一つの軸に関する断面積を、その軸に沿って積分したものである」

ことを学んだ。このことから

$$\begin{aligned}\iint_A f(x, y)\, dx\, dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy\end{aligned}$$

となる。

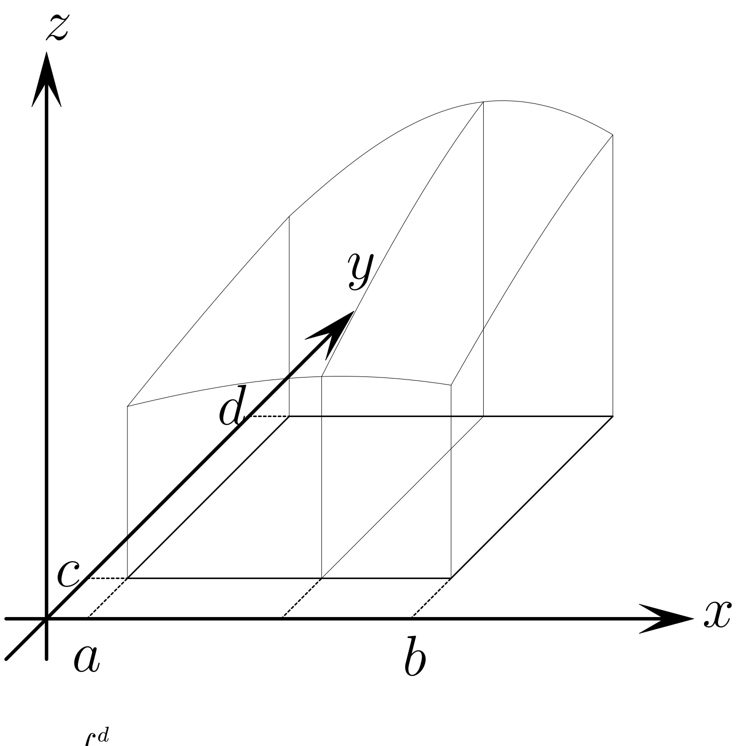


図 1.1: 断面積 $\displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy$ を x について $[a, b]$ で積分すると体積になる

次元 $n > 2$ の場合も、繰り返して用いることによって、

$$\begin{aligned}&\iint \cdots \int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_n\right) \cdots dx_2\right) dx_1\end{aligned}$$

すなわち 1 次元の積分を繰り返すこと (**累次積分**(るいじせきぶん), **重複積分**, **repeated integral**) に帰着する。

1.4.2 定理の陳述

Fubini の定理を述べよう (証明は 1.4.3 で述べる)。

定理 1.4.1 (重積分の重複積分への帰着, Stolz (1886), いわゆる Fubini の定理) A_1 は $\mathbf{R}^{n_1}$ の、A_2 は $\mathbf{R}^{n_2}$ の閉方体とする。有界関数 $f\colon A_1 \times A_2 \ni (x,y) \mapsto \mathbf{R}$ が、2 条件

(1) f は $A := A_1 \times A_2$ で積分可能である。

(2) $\forall x \in A_1$ を固定したとき、関数 $f(x,\cdot)\colon A_2 \ni y \longmapsto f(x,y) \in \mathbf{R}$ が A_2 で積分可能である。

を満たすならば、関数

$$F(x) := \int_{A_2} f(x,y)\,dy \quad (x \in A_1)$$

は A_1 で積分可能で、

$$\iint_{A_1\times A_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{A_1} F(x)\,dx$$

が成り立つ。すなわち

$$\iint_{A_1\times A_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{A_1}\left(\int_{A_2} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

$n_1 = n_2 = 1$ の場合を書いておくと、

定理 1.4.2 $A = [a,b]\times[c,d]$ 上の有界な関数 $f\colon A \to \mathbf{R}$ が、2 条件

(1) f は A で積分可能である。

(2) $\forall x \in [a,b]$ を固定したとき、関数 $f(x,\cdot)\colon [c,d] \ni y \longmapsto f(x,y) \in \mathbf{R}$ が $[c,d]$ で積分可能である。

を満たすならば、関数

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy \quad (x \in [a,b])$$

は $[a,b]$ で積分可能で

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx$$

が成り立つ。すなわち

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

注意 1.4.3 (記号に関する注意) 少し変わった記号であるが、

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

を

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

のように書くことがよくある。また、括弧を略して

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

のように書くことも多い。これが

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

と等しいのはちょっと混乱しそうである… ■

注意 1.4.4 (a) 二つの条件 (1), (2) のうち本質的なのは (1) の方で、(1) を仮定するだけで (2) を少し弱くした条件が成立し、適当な修正を加えた上で、定理の最後の等式も成立する (例えばスピヴァック [17] の定理 3-10 を見よ)。しかし、ここではあまり欲張らないことにする。

(b) 特に f が A 上連続であれば、(1), (2) は満たされる。つまり次の系 1.4.5 が成り立つ。

(c) 上の定理は Fubini の定理と呼ばれることが多いが、この形の定理がはじめて文献に登場するのは、多変数関数の微分の定義でも有名な Otto Stolz (1842–1905, 当時は Austria であった Hall に生まれ、Austria の Innsburck にて没する) の 1886 年の論文であるとか。Fubini が証明したのはもっとずっと強力な定理である。 ■

系 1.4.5 (重積分の重複積分への帰着 (連続関数の場合)) $A=[a,b]\times[c,d]$, $f\colon A\to\mathbf{R}$ 連続ならば関数

$$F(x):=\int_c^d f(x,y)\,dy$$

は $[c,d]$ 上連続（したがって積分可能）で

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

例 1.4.6 $A=[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)=x^2y$ のとき $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ を求めよ。

解. f は A 上連続であるから

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^1 x^2y\,dy\right)dx=\int_0^1\left[x^2\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{6}.■$$

例 1.4.7 $A=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi]$, $f(x,y)=\sin(x+y)$ のとき $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ を求めよ。

解.

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi}\sin(x+y)\,dy\right)dx = \int_0^{\pi/2}\left[-\cos(y+x)\right]_{y=0}^{y=\pi}dx\\ &= -\int_0^{\pi/2}(-\cos(x+\pi)+\cos x)dx = 2\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\\ &= 2\left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = 2.\blacksquare\end{aligned}$$

応用上は積分範囲が区間でない場合が多い。以下で紹介する「縦線集合(たてせん)」の場合は、次のような簡単な結果がある。

定理 1.4.8 (縦線集合に対する Fubini の定理) D を $\mathbf{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合、φ_1 と φ_2 を $\overline{D}$ 上の連続関数で、$\varphi_1 \le \varphi_2$ を満たすものとする。このとき、

$$\Omega := \{(x,y); x\in D, \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\} \tag{1.10}$$

とおくと、次の (1), (2) がなりたつ。

(1) Ω は $\mathbf{R}^{n+1}$ の有界 Jordan 可測集合である。

(2) $f\colon \Omega\to\mathbf{R}$ を有界連続関数とするとき、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_D\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

この定理をマスターするには、2 次元で使用する練習をするのが良いと思われるので、その場合に特化して書き直しておく。

系 1.4.9 $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ $(x\in[a,b])$ を満たす連続関数 $\varphi_1,\varphi_2\colon [a,b]\to\mathbf{R}$ を用いて、

$$\Omega := \{(x,y); x\in[a,b],\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$$

と定義される Ω は有界閉かつ Jordan 可測で、任意の連続関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ に対して、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

系 1.4.10 $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ $(y\in[c,d])$ を満たす連続関数 $\psi_1,\psi_2\colon [c,d]\to\mathbf{R}$ を用いて、

$$\Omega := \{(x,y); y\in[c,d],\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

と定義される Ω は有界閉かつ Jordan 可測で、任意の連続関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ に対して、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

注意 1.4.11 上の定理の Ω のように、適当な集合 D, 関数 φ_1, φ_2 によって、(1.10) の形に表

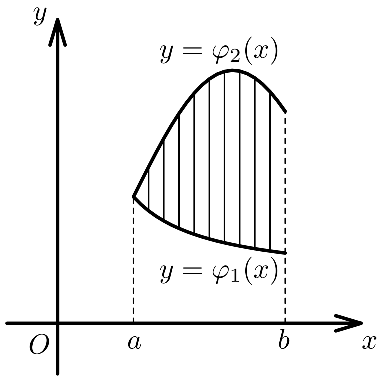


図 1.2: 二つのグラフではさまれる縦線集合

される集合を**縦線集合**と呼ぶ。 ■

例 1.4.12 (グラフと座標平面ではさまれる部分の測度) K を $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測な有界閉集合、$f\colon K \to \mathbf{R}$ を連続関数で、K 上 $f \geq 0$ を満たすものとするとき、

$$V := \{(x,y); x \in K,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

は定理の適用できる縦線集合であるから Jordan 可測で

$$\mu_{n+1}(V) = \iint_V dx\,dy = \int_K \left(\int_0^{f(x)} dy\right) dx = \int_K f(x)\,dx.\blacksquare$$

例 1.4.13 平面上で 3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ を頂点とする三角形の内部および周を Ω とするとき、

$$I := \iint_\Omega x^2 y\,dx\,dy$$

を求めよ。
(解) $\Omega = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$ であるから、

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y\,dx\,dy\right) = \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{10}.\blacksquare$$

例 1.4.14 (円の面積) 円 $\Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$ の面積を求めよ。
(解) $D = [-R,R]$, $\varphi_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $\varphi_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ とおくと、$\varphi_1 \leq \varphi_2$ で、$\Omega = \{(x,y); x \in D,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ と書けるので Ω は縦線集合である。

$$\mu(\Omega) = \iint_\Omega dx\,dy = \int_D \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\right) dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

$x = R\sin\theta$ ($\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) とおくと、

$$dx = R\cos\theta\,d\theta, \quad \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta} = \sqrt{R^2\cos^2\theta} = |R\cos\theta| = R\cos\theta$$

となるので、

$$\mu(\Omega) = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cos\theta \cdot R\cos\theta\,d\theta = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \pi R^2.\blacksquare$$

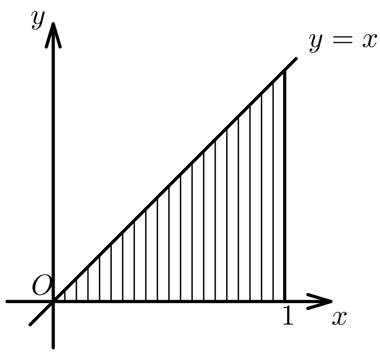


図 1.3: 例 1.4.13 の Ω

例 1.4.15 (球の体積) 球 $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ の体積を求めよ。
(解)

$$D := \{(x,y); x^2+y^2 \le R^2\}, \quad \varphi_1(x,y) := -\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \quad \varphi_2(x,y) := \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

とおくと $\forall (x,y) \in D$ に対して $\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y)$ が成り立ち、

$$\Omega = \{(x,y,z); (x,y) \in D,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$$

となるので Ω は縦線集合である。

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz\right) dx\,dy = \iint_D (\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y))\,dx\,dy \\ &= 2\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

実は D も縦線集合と見なせる。実際、

$$\psi_1(x) := -\sqrt{R^2-x^2}, \quad \psi_2(x) := \sqrt{R^2-x^2}$$

とおくとき、$\psi_1(x) \le \psi_2(x)$ $(x \in [-R,R])$ が成り立ち

$$D = \{(x,y); x \in [-R,R],\ \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x)\}$$

となる。ゆえに

$$\mu(\Omega) = 2\int_{-R}^{R}\left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx = 2\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx.$$

ここで

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \text{原点中心半径 } a \text{ の円板の上半分の面積} = \frac{\pi a^2}{2}$$

であることを $a = \sqrt{R^2-x^2}$ について用いると、

$$\mu(\Omega) = 2\int_{-R}^{R}\frac{\pi(R^2-x^2)}{2}\,dx = 2\pi\int_0^R (R^2-x^2)dx = 2\pi\left(R^2\cdot R - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

と、よく知っている球の体積が得られる[17]。 ■

[17] この結果を初めて発見したのはアルキメデス (シュラクサイの Archimedes, BC 287 頃–BC 212, 現イタリアの Syracuse に生まれ、Syracuse にて没する) と言われている。彼は証明まで与えている。

例 1.4.16 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; x^2+y^2+z^2\le x\}$ とするとき $\displaystyle\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$ を求めよ。
(解) Ω は中心 $(1/2,0,0)$, 半径 $1/2$ の閉球であるから、以下のように縦線集合とみなせる。

$$\begin{aligned}
D&=\left\{(x,y);(x-1/2)^2+y^2\le 1\right\},\\
\Omega&=\left\{(x,y,z);(x,y)\in D,-\sqrt{x-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{x-x^2-y^2}\right\}.
\end{aligned}$$

実は D 自身も縦線集合とみなせる。

$$D'=[0,1],\quad D=\left\{(x,y);x\in D',\ -\sqrt{x-x^2}\le y\le\sqrt{x-x^2}\right\}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz&=\iint_D\left(\int_{-\sqrt{x-x^2-y^2}}^{\sqrt{x-x^2-y^2}}x\,dz\right)dx\,dy=\iint_D 2x\sqrt{x-x^2-y^2}\,dx\,dy\\
&=\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}2x\sqrt{x-x^2-y^2}\,dy\right)dx\\
&=\int_0^1 4x\left(\int_0^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{(x-x^2)-y^2}\,dy\right)dx\\
&=\int_0^1 4x\cdot\frac{\pi(x-x^2)}{4}dx=\pi\int_0^1(x^2-x^3)dx=\frac{\pi}{12}.\blacksquare
\end{aligned}$$

積分の順序交換 Fubini の定理の効用として「重積分を累次積分に直す」ことをあげたが、**積分順序の交換**

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

も役に立つことが多い。つまり、もともと累次積分の形になっている式で、そのまま計算しようとすると面倒だが、積分の順序を交換すると簡単になることがある。
　一つの集合 Ω が二つの方向にいずれについても縦線集合である場合の、(重複) 積分の順序交換も応用上頻出する。

例 1.4.17 $I:=\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^1 e^{y^2}\,dy\right)dx$ を求めよ。
(解) この累次積分に対応する重積分の積分範囲 $\Omega=\{(x,y);0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$ は $\Omega=\{(x,y);0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$ とも書ける。ゆえに

$$\begin{aligned}
I&=\iint_\Omega e^{y^2}\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^y e^{y^2}dx\right)dy\\
&=\int_0^1 e^{y^2}\,[x]_{x=0}^{x=y}\,dy=\int_0^1 ye^{y^2}\,dy=\left[\frac{e^{y^2}}{2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}.\blacksquare
\end{aligned}$$

　この例のように Ω が

$$\begin{aligned}
&\Omega=\{(x,y);a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}=\{(x,y);c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\},\\
&\quad\text{ただし}\quad \varphi_1(x)\le\varphi_2(x)\quad(x\in[a,b]),\quad \psi_1(y)\le\psi_2(y)\quad(y\in[c,d])
\end{aligned}$$

と 2 通りに表される場合は等式

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_\Omega f(x,y)\;dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

が成り立つ。左辺から右辺を得ること、またはその逆に右辺から左辺を得ることを「**積分順序を交換する**」という。

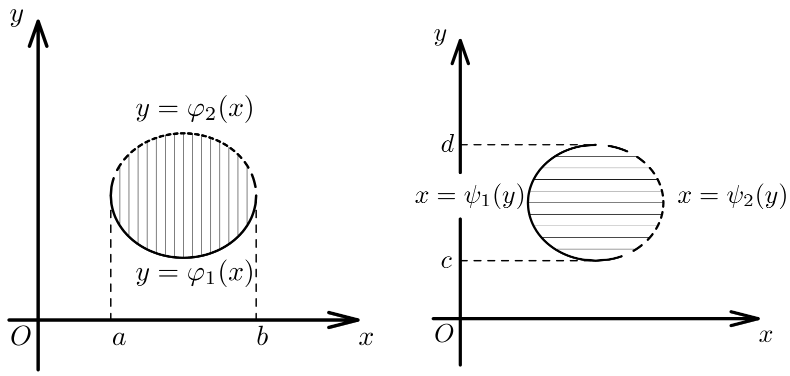


図 1.4: 両方向に縦線集合である集合

なお、積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換, 定理 1.8.11)

$$\frac{d}{dt}\int_A f(x,t)\;dx = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\;dx$$

の証明にも積分の順序交換が使われることはよく知られている (後の話であるが、忘れられがちなので[18]ここで注意しておく)。

問 $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数全体を X とする。$f,g\in X$ に対して、f と g の**畳み込み** (合成積, convolution) $f*g\in X$ を

$$(f*g)(x) := \int_0^x f(x-y)g(y)\;dy \quad (x\in[0,\infty))$$

で定めるとき、次の (1), (2) が成り立つことを示せ[19]。

(1) 任意の $f,g\in X$ に対して $f*g=g*f$ (交換則).

(2) 任意の $f,g,h\in X$ に対して $(f*g)*h=f*(g*h)$ (結合則).

1.4.3 Fubini の定理の証明

Fubini の定理の証明は割と素直である (特にこれと言う山場はない)。

[18]積分記号下の微分は、重要であるにも関わらず、微積分を学ぶ際に見過ごされがちである (時間切れ省略、となりやすいのかも)。目につく機会が少しでも多い方が良いと考え、ここにも登場させた次第である。

[19]演習問題は、“効率の観点から” 計算問題が多くなるが、本当はこの手の命題の証明のような重要な応用が少なくない。

定理 1.4.1 の証明　$A' = [a,b]$, $A'' = [c,d]$ の小閉方体への分割

$$\Delta' : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_\ell = b,$$

$$\Delta'' : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

をとり、$A'_i := [x_{i-1}, x_i]$ とおく。

この Δ', Δ'' を組にしてできる A の小閉方体への分割を Δ とすると、それに属する小閉方体は

$$A_{ij} := A'_i \times [y_{j-1}, y_j] \quad (1 \le i \le \ell;\ 1 \le j \le m)$$

となる。また $|\Delta| = \max\{|\Delta'|, |\Delta''|\}$ であるから、

$$|\Delta| \to 0 \iff |\Delta'| \to 0 \text{ かつ } |\Delta''| \to 0$$

である。

さて、

$$M_{ij} := \sup_{(x,y)\in A_{ij}} f(x,y), \quad m_{ij} := \inf_{(x,y)\in A_{ij}} f(x,y)$$

とおくと、$\forall \xi_i \in A'_i$ に対して $m_{ij} \le f(\xi_i, y) \le M_{ij}$ $(y \in [y_{j-1}, y_j])$ であるから、$[y_{j-1}, y_j]$ で積分して

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \le M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

$j = 1, 2, \ldots, m$ について和を取ると

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \le \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}),$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_c^d f(\xi_i, y)dy \le \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

この両辺に $\mu(A'_i)$ をかけて和を取ると

$$\sum_{i=1}^\ell \sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1})\mu(A'_i) \le \sum_{i=1}^\ell \int_c^d f(\xi_i, y)dy \cdot \mu(A'_i) \le \sum_{i=1}^\ell \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1})\mu(A'_i),$$

すなわち

$$L(f, A, \Delta) \le \sum_{i=1}^\ell F(\xi_i)\mu(A'_i) \le U(f, A, \Delta), \quad F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

f が A で積分可能であるという仮定から、$|\Delta| \to 0$ のとき、左辺も右辺も $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ に収束する。従って、挟み撃ちの原理により、F の Riemann 和 $\sum_i F(\xi_i)\mu(A'_i)$ も同じ値に収束する。

ゆえに F は $[a,b]$ で積分可能で

$$\int_a^b F(x)\,dx = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

が成り立つ。すなわち

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy. \quad \blacksquare$$

今度は縦線集合上の Fubini の定理である。

定理 1.4.8 の証明

(1) まず

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}; x \in \overline{D},\ y = \varphi_1(x)\}, \\
K_2 &:= \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}; x \in \overline{D},\ y = \varphi_2(x)\}, \\
K_3 &:= \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}; x \in \partial D,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}
\end{aligned}$$

とおくと

$$\partial\Omega = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

が成り立つ。K_1 と K_2 は有界閉集合上の連続関数のグラフなので、命題 1.3.6 より、Jordan 零集合である。ゆえに、定理を証明するには、K_3 が Jordan 零集合であることを示せば良い。

D が Jordan 可測であるという仮定から、∂D は Jordan 零集合である。よって、$\forall\varepsilon > 0$ に対して

$$\exists \{A_i\}_{i=1}^{\ell} \text{ s.t. 各 } A_i \text{ は閉方体}, \quad \partial D \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} A_i, \quad \sum_{i=1}^{\ell} \mu(A_i) < \varepsilon$$

が成り立つ。ここで

$$\tilde{A}_i := A_i \times [m, M], \quad m := \min_{x\in\overline{D}} \varphi_1(x), \quad M := \max_{x\in\overline{D}} \varphi_2(x)$$

とおくと、

$$K_3 \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{A}_i, \quad \sum_{i=1}^{\ell} \mu(\tilde{A}_i) < (M-m)\varepsilon.$$

これは K_3 が Lebesgue 零集合であることを示している。

(2) $n = 1$ の場合のみ証明する ($n \ge 2$ の場合も同様である)。$\overline{\Omega} \subset A$ なる区間 $A = [a,b] \times [c,d]$ を取り、$\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in \Omega) \\ 0 & ((x,y) \in A \setminus \Omega) \end{cases}$$

とおく。

$\forall x \in D$ に対して、関数

$$f(x,\cdot)\colon [c,d] \ni y \longmapsto \tilde{f}(x,y) \in \mathbf{R}$$

は高々 2 点 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ を除き連続であるから、これは $[c,d]$ で積分可能である。それゆえ、定理 1.4.1 から

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy &= \iint_A \tilde{f}(x,y)\, dx\, dy = \int_{[a,b]} \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\, dy \right) dx \\
&= \int_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right) dx. \blacksquare
\end{aligned}$$

1.4.4 補足

(工事中…)

一般化

ここまで、積分範囲が二つの閉方体の直積である場合を扱ってきたが、任意の Jordan 可測集合の直積の場合に一般化できる。

定理 1.4.18 (一般化された Fubini の定理) Ω_1, Ω_2 はそれぞれ $\mathbf{R}^{n_1}$, $\mathbf{R}^{n_2}$ の有界 Jordan 可測集合とする。有界関数 $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{R}$ が、次の 2 条件

(1) f は $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ で積分可能である。

(2) $\forall x \in \Omega_1$ に対して、$f(x,\cdot)\colon \Omega_2 \ni y \longmapsto f(x,y) \in \mathbf{R}$ は積分可能である。

を満たすならば、

$$\iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

証明 $j=1,2$ に対して $\Omega_j \subset A_j$ となる閉方体 A_j を取る。$A := A_1 \times A_2$ とおき、$\widetilde{f}\colon A \to \mathbf{R}$ を

$$\widetilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2) \\ 0 & ((x,y) \notin \Omega_1 \times \Omega_2) \end{cases}$$

で定める。条件 (1) より $\widetilde{f}$ は A で積分可能である。$\forall x \in A_1$ に対して、写像 $\widetilde{f}(x,\cdot)\colon A_2 \ni y \longmapsto \widetilde{f}(x,y) \in \mathbf{R}$ を考える。

(i) $x \notin \Omega_1$ のとき、$\widetilde{f}(x,\cdot)$ は定数関数 0 であるから、A_2 で積分可能である。

(ii) $x \in \Omega_1$ のとき、$\widetilde{f}(x,\cdot)\colon A_2 \to \mathbf{R}$ は、定理の仮定 (2) から、A_2 で積分可能である。

すなわち、任意の $x \in A_1$ に対して、$\widetilde{f}(x,\cdot)$ は A_2 で積分可能である。ゆえに閉方体の直積上での Fubini の定理から、

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_A \widetilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_{A_1}\left(\int_{A_2}\widetilde{f}(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}\widetilde{f}(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy\right)dx. \blacksquare\end{aligned}$$

系 1.4.19 A, B がそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の有界な Jordan 可測集合とするとき、$A \times B$ は $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ の Jordan 可測集合で、

$$\mu_{n+m}(A\times B) = \mu_n(A)\mu_m(B).$$

断面で積分

高校数学で「断面積を積分すると体積になる」と学んだはずだが、それをきちんと (少し一般化して) 述べたのが次の命題である (計算練習用の問題を解く際に結構お世話になるような気がする)。

命題 1.4.20 D は $\mathbf{R}^{n+1}$ の有界 Jordan 可測集合で、任意の $\eta \in \mathbf{R}$ に対して、

$$D_\eta := \{x \in \mathbf{R}^n; (x, \eta) \in D\} \qquad (\text{超平面 } y = \eta \text{ による断面の超平面 } y = 0 \text{ への射影})$$

が $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測集合であるならば、任意の有界連続関数 $f\colon D \to \mathbf{R}$ に対して、

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{D_y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

が成り立つ。ただし $c := \inf_{(x,y)\in D} y$, $d := \sup_{(x,y)\in D} y$ であり、$D_y = \emptyset$ となる y に対しては $\int_{D_y} f(x,y)\,dx = 0$ と解釈する。特に

$$\mu_{n+1}(D) = \int_c^d \left(\int_{D_y} dx \right) dy = \int_c^d \mu_n(D_y)\,dy.$$

証明 $\mathbf{R}^n$ の十分大きい閉方体 A を取ると $D \subset A \times [c,d]$ となる。$\widetilde{f}\colon A \to \mathbf{R}$ を

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in D) \\ 0 & ((x,y) \notin D) \end{cases}$$

で定めると、$\forall y \in [c,d]$ に対して、

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x \in D_y) \\ 0 & (x \notin D_y) \end{cases}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{A\times[a,b]} \widetilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_A \widetilde{f}(x,y)\,dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_{D_y} f(x,y)\,dx \right) dy. \blacksquare \end{aligned}$$

例 1.4.21 (カヴァリエリの原理) $\mathbf{R}^{n+1}$ の有界 Jordan 可測集合 D, E が、

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad \mu_n(D_y) = \mu_n(E_y)$$

を満たすならば

$$\mu_{n+1}(D) = \int_a^b \mu_n(D_y)\,dy = \int_a^b \mu_n(E_y)\,dy = \mu_{n+1}(E).$$

すなわち「二つの立体を、一つの軸に垂直な平面で切った切り口の断面積がつねに等しければ、それら二つの立体の体積は等しい」というカヴァリエリ[20]の原理が証明できた。 ■

[20]Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647, 現在はイタリアの Milan に生まれ、イタリアの Bologna にて没する。Galileo の弟子。)

1.5 変数変換の公式

ここでは重積分の変数変換の公式 (いわゆる**置換積分**) を学ぶ。

1.5.1 1 次元の復習

まず 1 変数の場合の復習をしよう。積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

があるとき、任意の C^1 級の全単射 $\varphi\colon [\alpha,\beta]\to[a,b]$ と、$[a,b]$ 上の連続関数 f に対して、

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du \quad (\text{ただし } \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b). \tag{1.11}$$

証明は簡単で、f の原始関数 F を取ると、

$$f(\varphi(u))\varphi'(u)=F'(\varphi(u))\varphi'(u)=\frac{d}{du}F(\varphi(u))$$

であるから、

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du=\int_\alpha^\beta \frac{d}{du}F(\varphi(u))\,du=[F(\varphi(u))]_\alpha^\beta=[F(x)]_a^b=\int_a^b f(x)\,dx.$$

覚え方　多分、高等学校で勉強した場合は、次のように覚えているであろう。$x=\varphi(u)$ とおくと

$$dx=\varphi'(u)\;du \quad (\text{あるいは } dx=\frac{dx}{du}du)$$

であるから

$$F(u)du=f(\varphi(u))\varphi'(u)du=f(x)dx.$$

変数の範囲については自然に

u	$\alpha\to\beta$
x	$a\to b$

ほとんど暗記の苦労のない公式である (記号を作った人が賢いせいである)。

1.5.2 定理の紹介

まず素朴な形の定理を述べよう。

定理 1.5.1 (重積分の変数変換, $n=2$: Euler (1769), $n=3$: Lagrange (1773)) D, Ω は $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな Jordan 可測集合、U は D を含む $\mathbf{R}^n$ の開集合、$\varphi\colon U \to \mathbf{R}^n$ は C^1 級の写像で次の (i), (ii), (iii) をみたすものとする。

(i) $\varphi(D) = \Omega$

(ii) $\det \varphi'(u) \neq 0$ $(u \in D)$

(iii) φ は単射

このとき、任意の連続関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ に対して

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_D f(\varphi(u))\,|\det \varphi'(u)|\;du. \tag{1.12}$$

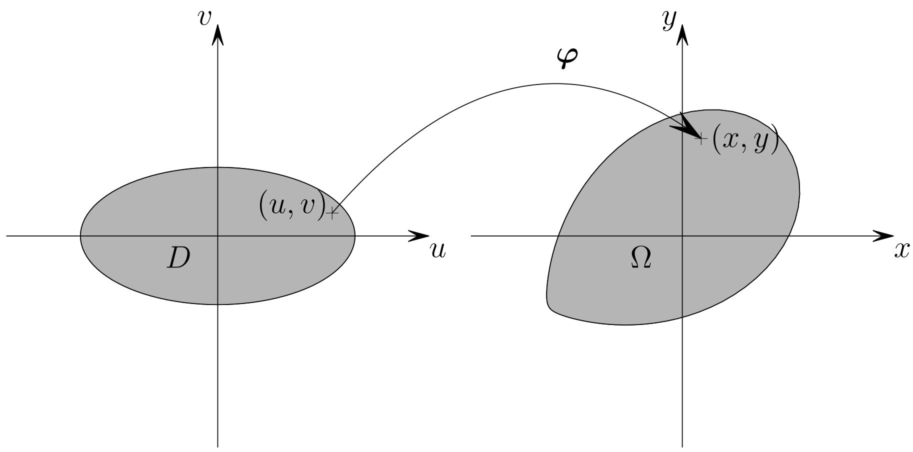


図 1.5: $n=2$ の場合: uv 平面内の D から xy 平面内の Ω への写像

残念ながら、この形のままでは少々使いづらいことが多い。例えば頻出する極座標変換に適用するのが難しい[21]。そこで、少々複雑になってしまうが、次の定理も紹介しておく (これは条件を満たさない「小さな例外集合」 N の存在を許すというのがミソ)。

[21] $r=0$ のところで単射性も破綻するし、$\det \varphi' = 0$ となってしまう。また D をコンパクトにするために $\theta = 2\pi$ を入れると、$\theta = 0, 2\pi$ でだぶってしまい、そこでも単射性が崩れる。

定理 1.5.2 (重積分の変数変換 (改良版)) D,Ω は $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな Jordan 可測集合、N は $\mu(N)=0$ をみたす D の部分集合、U は D を含む $\mathbf{R}^n$ の開集合、$\varphi\colon U\to\mathbf{R}^n$ は C^1 級の写像で次の (i), (ii), (iii) をみたすものとする。

(i) $\varphi(D)=\Omega$

(ii) $\det\varphi'(u)\neq 0\ (u\in D\setminus N)$

(iii) $\varphi|_{D\setminus N}$ は単射

このとき、任意の連続関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ に対して

$$\int_\Omega f(x)\,dx=\int_D f(\varphi(u))\left|\det\varphi'(u)\right|\,du. \tag{1.13}$$

注意 1.5.3 (1 変数の公式との比較) 公式 (1.13) で φ の**ヤコビアン** (ヤコビ行列の行列式) $\det\varphi'(u)$ の絶対値が現れるが、(1.11) では、絶対値のついていない $\varphi'(u)$ が現れる。これは一見食い違っているように思えるかもしれないが、1 次元の積分では、積分区間の端点に大小関係がなくても構わないためで、実は (1.11) でも、

$$a'=\min\{a,b\},\quad b'=\max\{a,b\},\quad \alpha'=\min\{\alpha,\beta\},\quad \beta'=\max\{\alpha,\beta\}$$

とおいて書き直すと、

$$\int_{[\alpha',\beta']}f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,du=\int_{[a',b']}f(x)\,dx$$

と絶対値が現れる。■

注意 1.5.4 (この式で覚えるのがお勧め？) 写像 $(u_1,\dots,u_n)\mapsto(x_1,\dots,x_n)$ のヤコビアンを

$$\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)}$$

と表すことがある。例えば $n=2$ の場合、

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{pmatrix}=x_uy_v-x_vy_u.$$

この記号を用いると (やや形式的ではあるが)

$$dx_1\cdots dx_n=\left|\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)}\right|du_1\cdots du_n$$

という印象的な式が得られる。高校数学の $dx=\dfrac{dx}{du}\,du$ と比較するとよい。■

1.5.3 例

変数変換の公式を用いる計算例をいくつか紹介しよう。その中でも、極座標変換はよく使うので[22]、最初に調べておこう。

[22]円盤領域、扇形領域、円環領域、さらには全平面や楕円領域などでの積分に便利に利用できる。

平面極座標変換

xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ と、原点 O との距離 $\overline{\mathrm{OP}}$ を r, 動径 OP の (x 軸の正方向から、「反時計回りに」測った) 角度を θ とするとき、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi)).$$

(θ の値の範囲の選び方には、ある程度自由がある。$\theta \in (-\pi, \pi]$ のように取ることも可能である。)

この式によって写像 $\varphi\colon \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を定めると、

$$\varphi'(r,\theta) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから、そのヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\varphi' = \cos\theta\cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta = r.$$

よって平面極座標変換については、$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ となる。これは良く現われるので、覚えておくと便利である。

(r,θ) の範囲を $(0,\infty)\times[0,2\pi)$ に限ると、φ は 1 対 1 で、いたるところ $\det\varphi' \neq 0$ を満たす。$r = 0$ や $\theta = 2\pi$ を含めた場合には、φ は 1 対 1 でなくなったり、$\det\varphi' = 0$ となったりする。それゆえ定理 1.5.1 の適用は難しいが、定理 1.5.2 を適用するのは容易である。

例えば $\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \leq R^2\}$ に対して、$D := \{(r,\theta); 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とおくと、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\right)d\theta$$

となることが分かる。実際 $N := \{(r,\theta)\in D; r = 0 \text{ または } \theta = 2\pi\}$ として定理 1.5.2 を適用すればよい。

($r\theta$ 平面から xy 平面への写像の図を描きたいと思っているが…授業では忘れずに描くこと)

例 1.5.5 (円板領域での積分)

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} x^2\,dx\,dy$$

については

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (r\cos\theta)^2\,dr\right)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi}{4}.\blacksquare$$

例 1.5.6 $r = r(\theta)$ が $[\alpha,\beta]$ $(\beta-\alpha \leq 2\pi)$ で連続、ならば、極座標について

$$0 \leq r \leq r(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

で表される xy 平面上の図形 Ω の面積は

$$\mu(\Omega) = \iint_\Omega dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{r(\theta)} r\,dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2 d\theta$$

で与えられる (図を用意しよう！)。— 「扇形の面積は $\frac{1}{2}r^2\theta$」 という公式があるが、これはその一般化である。例えば **Cardioid**

$$r = 1 + \cos\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

で囲まれた領域 Ω の面積は

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{3}{2}\pi. \blacksquare$$

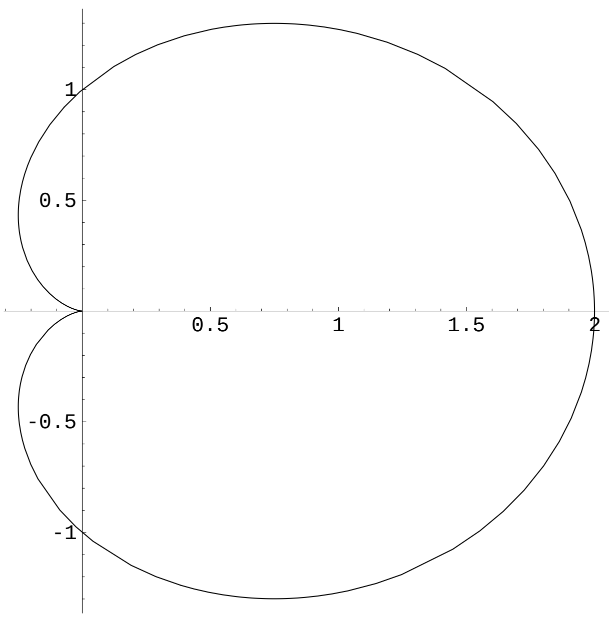


図 1.6: Cardioid `ParametricPlot[{(1+Cos[t])Cos[t],(1+Cos[t])Sin[t]}, {t,0,2Pi}]`

例 1.5.7

$$I = \iint_\Omega (1 - x^2 - y^2) dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \le x,\ y \ge 0\}$$

を求めよ。この問題は前節の Fubini の定理を用いても解けるが、ここでは極座標変換を用いてみる。

$$x^2 + y^2 \le x \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 \le 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$$

であるから、Ω は $(1/2, 0)$ を中心とする半径 $1/2$ の円盤の上半分である。

この問題については

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

という変数変換が有効である。この場合も $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ で、Ω に対応するのは

$$D = \{(r,\theta); 0 \le r \le 1/2,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

であるから、

$$I=\iint_D\left(1-\left(\frac{1}{2}+r\cos\theta\right)^2-(r\sin\theta)^2\right)r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^\pi d\theta\int_0^{1/2}\left(\frac{3}{4}r-r^2\cos\theta-r^3\right)dr=\cdots=\frac{5\pi}{64}.$$

ちょっと気づきにくいが、普通の極座標変換

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}\qquad (r\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi])$$

によって、Ω に対応する領域が案外と簡単で、

$$D=\left\{(r,\theta);0\le r\le\cos\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

と求まる (図を描いて見ること。円周 $\partial\Omega$ は極座標で $r=\cos\theta$ と表されることを理解しよう。これは、原点を通り、x 軸から測って角度 θ をなす直線 $y=x\tan\theta$ と円の交点を考えることによって分かる。)。すなわち $\varphi(r,\theta)=(x,y)$ とすると、$\varphi(D)=\Omega$ となる。ゆえに

$$I=\iint_\Omega(1-x^2-y^2)dx\,dy=\iint_D(1-r^2)r\,drd\theta=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\cos\theta}(r-r^3)dr=\frac{5\pi}{64}.\blacksquare$$

空間極座標変換

$\mathbf{R}^3$ の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ の原点からの距離 $\overline{\mathrm{OP}}$ を $r\in[0,\infty)$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と z 軸の正方向のなす角を $\theta\in[0,\pi]$, P の xy 平面への射影を P', 動径 OP' (長さは $r\sin\theta$ である) を x 軸の正の部分から反時計回りに測った角を $\phi\in[0,2\pi)$ とすると[23]、

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{cases}\qquad (r\ge 0,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi)$$

が成り立つ。r, θ, ϕ を P の**空間極座標** (**3 次元極座標**あるいは**球 (面) 座標**, **spherical coordinate**) とよぶ。

この式で、$\varphi\colon[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\ni(r,\theta,\phi)\mapsto(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ を定めると、

$$\varphi'(r,\theta,\phi)=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

この行列の行列式を第 3 行で展開することにより、

$$\det\varphi'=\cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix}+(-1)(-r\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix}$$
$$=\cos\theta\cdot r\cos\theta\cdot r\sin\theta\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}+(-1)(-r\sin\theta)\cdot\sin\theta\cdot r\sin\theta\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}$$
$$=r^2\cos^2\theta\sin\theta+r^2\sin^3\theta=r^2\sin\theta$$

---

[23] θ, ϕ の測り方の違いをよく理解すること。$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\boldsymbol{e}_3}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right\|}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\rho:=\sqrt{x^2+y^2})$. こう書くとかえって分かりにくい？

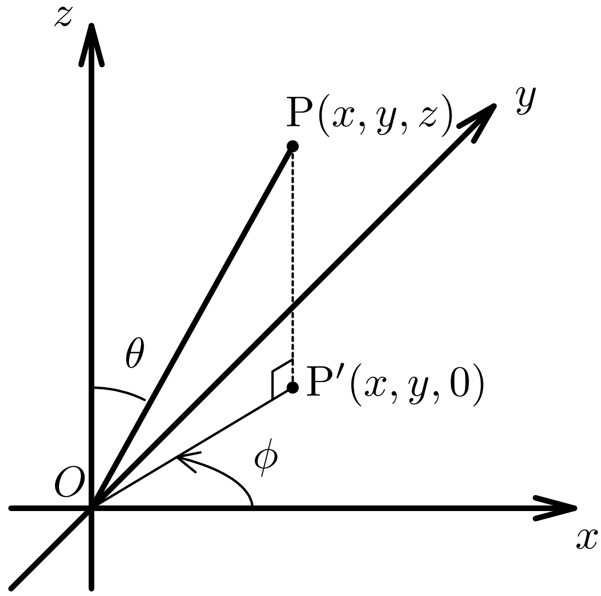


図 1.7: 球座標の θ, ϕ

となる。$\theta \in [0,\pi]$ であるから $\sin\theta \geq 0$ であるので、$r^2\sin\theta \geq 0$ となることに注意すると、

$$dx\,dy\,dz = |\det\varphi'|\,dr d\theta\,d\phi = r^2\sin\theta\;dr\;d\theta\;d\phi. \blacksquare$$

例 1.5.8 (球座標を用いた球の体積の計算) $\Omega = \{(x,y,x); x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ は $D = \{(r,\theta,\phi); 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ によって $\Omega = \varphi(D)$ と書ける。

ゆえに

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= \iiint_\Omega 1\;dx\,dy\,dz = \iiint_D |\det\varphi'|\;dr\;d\theta\;d\phi = \iiint_D r^2\sin\theta\;dr\;d\theta\;d\phi \\
&= \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi r^2\sin\theta\;d\theta\right)d\phi\right) = \left(\int_0^R r^2 dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}d\phi\right)\cdot\left(\int_0^\pi \sin\theta\;d\theta\right) \\
&= \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}. \blacksquare
\end{aligned}$$

注意 1.5.9 平面極座標のときと同様に、定理 1.5.1 の適用は難しいが、定理 1.5.2 を適用するのは容易である。$D := [0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, $N = \{(r,\theta,\phi) \in D; r = 0 \text{ or } \theta = 0 \text{ or } \theta = \pi \text{ or } \phi = 2\pi\}$ とすればよい。 $\blacksquare$

問　上半球 $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}$ や、1/8 球 $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ を求める場合はどうか？ (結果はもちろん明らかだが、変数変換をしたときの r, θ, ϕ の範囲がちゃんとわかるか？)

問　a, b, c を正定数、$(x_0,y_0,z_0) \in \mathbf{R}^3$ とするとき、3 次元の楕円体

$$\Omega = \{(x,y,z); \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2} \leq 1\}$$

の体積を求めよ。

(ヒント) 極座標変換をもじった

$$\frac{x-x_0}{a}=r\sin\theta\cos\phi,\quad \frac{y-y_0}{b}=r\sin\theta\sin\phi,\quad \frac{z-z_0}{c}=r\cos\theta$$

という変数変換を使う。あるいは

$$\frac{x-x_0}{a}=u,\quad \frac{y-y_0}{b}=v,\quad \frac{z-z_0}{c}=w$$

という変数変換で、単位球 $\{(u,v,w);u^2+v^2+w^2\le 1\}$ 上の積分に帰着する。■

1 次変換

極座標変換以外には、1 次変換[24]による変数変換が比較的よく出て来る。

例 1.5.10 平面上で $(0,0)$, $(4,1)$, $(2,3)$ を頂点とする三角形を Ω とするとき、$I=\iint_\Omega x\,dx\,dy$ を求めよ。

(解) $x=4u+2v$, $y=u+3v$ と変数変換すると、ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=4\cdot 3-2\cdot 1=10$$

なので、$dx\,dy=|10|du\,dv=10\,du\,dv$ で、Ω に対応するのは、$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形 Δ である。ゆえに

$$\begin{aligned} I&=\iint_\Delta(4u+2v)\cdot 10\,du\,dv=10\int_0^1\left(\int_0^{1-v}(4u+2v)dv\right)du\\ &=10\int_0^1(-3u^2+u^2+1)du=10.\blacksquare\end{aligned}$$

例 1.5.11 xy 平面上の集合 Ω を、直線 $y=2x$, $y=\dfrac{x}{2}$, $x+y=2$ で囲まれた三角形とするとき、

$$I=\iint_\Omega(x+y)dx\,dy$$

を求めよ。

(解) Ω は $(0,0)$, $(4/3,2/3)$, $(2/3,4/3)$ を頂点とする三角形であるから、$\varphi\colon\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad A:=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

で定めると、ヤコビアン $\det\varphi'\equiv\det A=\dfrac{4}{3}$ で、Ω は uv 平面上の、3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形 $\Delta=\{(u,v);u\ge 0,\ v\ge 0,\ u+v\le 1\}$ に写像される。

$$\begin{aligned} I&=\iint_\Delta\left[\left(\frac{4}{3}u+\frac{2}{3}v\right)+\left(\frac{2}{3}u+\frac{4}{3}v\right)\right]\cdot\frac{4}{3}du\,dv=\frac{8}{3}\iint_\Delta(u+v)du\,dv\\ &=\frac{8}{3}\int_0^1\left(\int_0^{1-u}(u+v)dv\right)du=\frac{8}{9}.\blacksquare\end{aligned}$$

[24] $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への線型写像を $\mathbf{R}^n$ の 1 次変換と呼ぶ (習っているはず？)。

例題 1.5.1 (三角形の重心) 平面上の 1 直線上にはない 3 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$ を頂点とする三角形 (周も含める) を Ω とするとき、

$$\mu(\Omega) := \iint_\Omega dx\,dy, \quad X := \iint_\Omega x\,dx\,dy, \quad Y := \iint_\Omega y\,dx\,dy$$

を求めよ。
(解) 写像 $\varphi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を

$$\varphi(u,v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

で定めると、

$$\Delta := \{(u,v) \in \mathbf{R}^2; u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq 1\},$$

とおくとき、$\varphi(\Delta) = \Omega$ が成り立つ。

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}, \quad \det \varphi'(u,v) = D$$

である。ただし、

$$D := (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

とおいた。この D は定数である。三角柱、三角錐の体積として容易に

$$\iint_\Delta du\,dv = \frac{1}{2}, \quad \iint_\Delta u\,du\,dv = \iint_\Delta v\,du\,dv = \frac{1}{6}$$

が求まる。これを用いて

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= \iint_\Omega dx\,dy = \iint_\Delta |D|\,du\,dv = |D| \iint_\Delta du\,dv = \frac{|D|}{2}, \\
X &= \iint_\Omega x\,dx\,dy = \iint_\Delta [x_1 + (x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1)v] \cdot |D|\,du\,dv \\
&= |D| \left(x_1 \iint_\Delta du\,dv + (x_2 - x_1) \iint_\Delta u\,du\,dv + (x_3 - x_1) \iint_\Delta v\,du\,dv \right) \\
&= |D| \left(x_1 \cdot \frac{1}{2} + (x_2 - x_1)\frac{1}{6} + (x_3 - x_1)\frac{1}{6} \right) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{6} |D|.
\end{aligned}$$

Y は X と同様の計算で

$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{6} |D|.$$

一般に平面図形 Ω の重心の座標 $(\overline{x}, \overline{y})$ は、

$$\overline{x} := \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint_\Omega x\,dx\,dy, \quad \overline{y} := \frac{1}{\mu(\Omega)} \iint_\Omega y\,dx\,dy$$

で定義される (B.4 節「重心」参照)。この問題の三角形の場合は、

$$\overline{x} = \frac{1}{|D|/2} \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{6} |D| = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

もちろん、高校数学でおなじみの公式となる。■

1.5.4 参考: 平面の 1 次変換のいろは

1 次変換に対する感覚は、変数変換の公式を理解するために必要であるにもかかわらず、多くの学生が満足に持ち合わせていない。以前は高校数学のカリキュラムに入っていたのだが…(こういうぼやきは良くないと思うのだけど)

$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ について、以下の (1)–(6) が成り立つ。

(1) f が線形写像 $\iff \exists A \in M(m,n;\mathbf{R})$ s.t. $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbf{R}^n)$.

(2) $m = n$, $\exists A \in M(n;\mathbf{R})$ s.t. $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ とするとき、次の (i)–(vii) は同値である。

- (i) f は全単射 (f は逆写像 f^{-1} を持つ)
- (ii) f は全射
- (iii) f は単射
- (iv) $\operatorname{rank} f = n$ $(\operatorname{rank} A = n)$
- (v) $\ker f = \{0\}$
- (vi) $\det A \neq 0$
- (vii) A が逆行列を持つ

このとき $f^{-1}(x) = A^{-1}x$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ で、f は同相写像、さらに強く C^∞ 同相である。

(3) $m = n = 2$, $\exists A \in M(2;\mathbf{R})$ s.t. $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbf{R}^2)$ とするとき[25]、次のいずれかただ一つだけが成り立つ。

- (i) $f(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$ ($\Leftrightarrow$ A が逆行列を持つ $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 2$)
- (ii) $f(\mathbf{R}^2)$ は原点を通る直線 ($\Leftrightarrow$ A は特異かつ $A \neq O \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 1$)
- (iii) $f(\mathbf{R}^2) = \{0\}$ ($\Leftrightarrow A = O \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 0$)

(4) $m = n = 2$, $\exists A \in GL(2;\mathbf{R})$ s.t. $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbf{R}^2)$ とするとき、次の (a)–(d) が成り立つ。(**注**: $GL(2;\mathbf{R}) = \{A \in M(2;\mathbf{R}); \det A \neq 0\}$ である。)

- (a) f は任意の直線を直線に写す。
- (b) f は任意の線分を線分に写す (端点は端点に、内部は内部に)。
- (c) f は任意の三角形を三角形に写す (頂点は頂点に、辺は辺に、内部は内部に、外部は外部に)。
- (d) f は任意の平行四辺形を平行四辺形に写す (頂点は頂点に、辺は辺に、内部は内部に、外部は外部に)。

(5) $m = n = 2$, $\exists A \in M(2;\mathbf{R})$ s.t. $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbf{R}^2)$ とするとき、

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} \qquad\iff\qquad A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}.$$

(**注**: A が逆行列を持っても持たなくても関係ない。)

[25] 成分で書くと $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ のようになる。

(6) $\mathbf{R}^2$ において、平行四辺形 $\{\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}; t\in[0,1],\ s\in[0,1]\}$ の面積は $|\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$. より強く、$A\in M(2;\mathbf{R})$ とするとき、$f\colon \mathbf{R}^2\ni x\mapsto Ax\in\mathbf{R}^2$ は、任意の図形[26]の面積を $|\det A|$ 倍にする ($\det A<0$ のときは「裏返し」)。

練習問題 A　上の (4) を証明せよ。(ヒント: 例えば 2 点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を通る直線上の任意の点は $t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}\quad(t\in\mathbf{R})$ と書けるが、$f(t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b})=tf(\boldsymbol{a})+(1-t)f(\boldsymbol{b})$ である。)

練習問題 B　上の (3)–(6) の 3 次元バージョンを書け。

注意 1.5.12 (線型写像 $f\colon\mathbf{R}^n\ni x\mapsto Ax\in\mathbf{R}^n$ で、測度が $|\det A|$ 倍になる) 後で示すように、f は任意の n 次元 Jordan 可測集合の測度を $|\det A|$ 倍にする。$n=2$ として、図形を平行四辺形に限った場合、つまり上の (6) の事実は、たとえ高等学校で習っていなくても、高校数学の知識を用いて以下のように容易に導出できる。$\Omega:=\{t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}; t\in[0,1],\ s\in[0,1]\}$ とするとき、

$$\begin{aligned}
\mu_2(\Omega)&=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}\\
&=\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}=\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=|a_1b_2-a_2b_1|\\
&=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).
\end{aligned}$$

また $f\colon\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ による Ω の像は、$\{tA\boldsymbol{a}+sA\boldsymbol{b}; t\in[0,1],\ s\in[0,1]\}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mu_2(f(\Omega))&=|\det(A\boldsymbol{a},A\boldsymbol{b})|=|\det[A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})]|=|\det A\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|=|\det A|\,|\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\\
&=|\det A|\,\mu_2(\Omega).
\end{aligned}$$

ところが残念なことに、この「多変数の微分積分学 2」としては、この計算を「証明」として採用することはできない。我々は Ω の面積 $\mu_2(\Omega)$ を

$$\mu_2(\Omega)\overset{\text{def.}}{=}\iint_\Omega dx\,dy$$

で定義してあるので、最初の $\mu_2(\Omega)=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ は明らかではない。■

練習問題 C

(1) $\mathbf{R}^2$ の三角形 $\triangle(\boldsymbol{p};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}):=\{\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b};\ t\ge0,\ s\ge0,\ t+s\le1\}$ の面積を求めよ。

(2) $\mathbf{R}^3$ の四面体 $T(\boldsymbol{p};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}):=\{\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}; t\ge0,\ s\ge0,\ r\ge0,\ t+s+r\le1\}$ の体積を求めよ。

(3) $\mathbf{R}^n$ $(n\in\mathbf{N},\ n\ge4)$ に一般化するとどうなるか？

[26]大学数学的ツッコミを入れると、「任意の有界 Jordan 可測集合」が正しい。

1.5.5 なぜ公式が成り立つかについてのイメージ

変数変換の公式の厳密な証明を限られた授業時間中に説明するのはやや困難である (証明に興味がある人のために付録 D.1 に収録しておく)。ここでは公式が成り立つことのおおざっぱな説明を行うにとどめる。

D に格子をかぶせて、D を閉方体の合併で近似する: $D \simeq \bigcup_{j=1}^{\ell} A_j$. このとき

$$\Omega = \varphi(D) \simeq \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\ell} \varphi(A_j).$$

各 A_j から代表点 u_j を選ぶと、

$$\int_\Omega f(x)\,dx \simeq \int_{\bigcup_{j=1}^{\ell}\varphi(A_j)} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\ell}\int_{\varphi(A_j)} f(x)\,dx \simeq \sum_{j=1}^{\ell} f(\varphi(u_j))\mu(\varphi(A_j)).$$

ここで微分の定義から、$u \to u_j$ のとき $\varphi(u) \simeq \varphi(u_j) + \varphi'(u_j)(u-u_j)$ に注意すると、

$$\mu(\varphi(A_j)) \simeq |\det \varphi'(u_j)|\,\mu(A_j).$$

ここで 1 次関数 $g(x) = Ax + b$ につき $\mu(g(A_j)) = |\det A|\,\mu(A_j)$ が成り立つことを用いた。ゆえに

$$\int_D f(x)\,dx \simeq \sum_{j=1}^{\ell} f(\varphi(u_j))\,|\det\varphi'(u_j)|\,\mu(A_j) \simeq \int_\Omega f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du.$$

(中央の辺は、右辺の積分の Riemann 和であることに注意せよ。) ■

1.6 三重積分の計算指南

1.6.1 Fubini の定理 (続き) 三重積分の場合

$\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 上の次の積分

$$I := \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

を重複積分に直して計算することを考える。

次の (1), (2) は紹介済みである。

(1) (3 次元の縦線集合上の Fubini の定理) Ω の xy 平面への射影 $D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \exists z \in \mathbf{R} \text{ s.t. } (x,y,z) \in \Omega\}$ 上の関数 $\varphi_1\colon D \to \mathbf{R}$, $\varphi_2\colon D \to \mathbf{R}$ で、$\varphi_1 \le \varphi_2$ (on D) と

$$\Omega = \{(x,y,z); (x,y) \in D, \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$$

を満たすものがあるならば、

$$I = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy.$$

(2) (「体積は断面積の積分」の一般化、軸に沿って断面での積分を積分)

$$a := \inf_{(x,y,z)\in\Omega} x, \quad b := \sup_{(x,y,z)\in\Omega} x.$$

さらに $x' \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\Omega_{x'} := \{(y,z) \in \mathbf{R}^2; (x',y,z) \in \Omega\} \quad (\text{平面 } x = x' \text{ での断面の } yz \text{ 平面への射影})$$

とおくとき、

$$I = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_x} f(x,y,z)\, dy\, dz \right) dx.$$

例えば $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ とするとき、(1) に従うと

$$I = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy, \quad D := \{(x,y); x^2+y^2 \le R^2\}.$$

(2) に従うと

$$I = \int_{-R}^{R} \left(\iint_{\Omega_x} f(x,y,z)\, dy\, dz \right) dx, \quad \Omega_x := \{(y,z); y^2+z^2 \le R^2 - x^2\}.$$

例 1.6.1 $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2 \le 1, x \le z \le 2x+1\}$ の体積を求めよ。
(解) これは方法 (1) を使うのに向いている。

$$D := \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}, \quad \varphi_1(x,y) := x, \quad \varphi_2(x,y) := 2x+1$$

とおくと、

$$\varphi_1 \le \varphi_2 \quad (\text{on } D), \quad \Omega = \{(x,y,z); (x,y) \in D,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\mu_3(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_x^{2x+1} dz \right) dx\, dy = \iint_D (x+1) dx\, dy \\ &= \iint_{0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi} (r\cos\theta + 1)\cdot r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 r\, dr = \pi. \blacksquare\end{aligned}$$

例 1.6.2 $\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le a\}$ の体積を求めよ。
(解) これは方法 (2) を使うのに向いている。任意の $z \in [0,a]$ に対して

$$\Omega_z := \{(x,y); (x,y,z) \in \Omega\} = \{(x,y); x^2+y^2 \le z^2\}$$

であるから、

$$\mu_3(\Omega) = \iiint_\Omega dx\, dy\, dz = \int_0^a \left(\iint_{\Omega_z} dx\, dy \right) dz = \int_0^a \mu_2(\Omega_z)\, dz = \int_0^a \pi z^2\, dz = \frac{\pi a^3}{3}. \blacksquare$$

1.6.2 不等式で定義されていない立体図形上の積分

$\Omega \subset \mathbf{R}^3$ を不等式による条件で与えるのでなく、「○○と△△で囲まれた」,「○○と△△で切り取られた」のような説明で指定する場合もある (特に「立体図形の体積を求めよ」という問題などでは頻出)。その場合は、簡単な図を書いたりして、Ω を定義する条件を不等式に翻訳することが必要になる場合が多い。

例 1.6.3 (立体図形の体積の計算例) $\mathbf{R}^3$ において、曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = x$ とで囲まれる部分 Ω の体積を求めよ。簡単な図を描くことで、$z = x^2 + y^2$ で下から、$z = x$ で上から囲まれているということが分かる。すなわち

$$\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \le z \le x\}.$$

これは縦線集合である。実際

$$D := \{(x, y); x^2 + y^2 \le x\},$$

さらに

$$\varphi_1(x, y) := x^2 + y^2, \quad \varphi_2(x, y) := x$$

とおくと、$\varphi_1(x, y) \le \varphi_2(x, y)$ $((x, y) \in D)$ で、Ω は

$$\Omega = \{(x, y, z); (x, y) \in D, \ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}$$

と表される[27]。ゆえに

$$\mu(\Omega) = \iiint_\Omega 1 \, dx \, dy \, dz = \iint_D (\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)) \, dx \, dy = \iint_D (x - x^2 - y^2) \, dx \, dy.$$

D が中心 $(1/2, 0)$, 半径 $1/2$ の円盤であるから、$x = r \cos\theta + 1/2$, $y = r \sin\theta$ とおくと、$0 \le r \le 1/2$, $0 \le \theta < 2\pi$ で、$dx \, dy = r dr \, d\theta$, $x - x^2 - y^2 = 1/4 - r^2$ となるので、

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) &= \iint_{\substack{0 \le r \le 1/2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} \left(\frac{1}{4} - r^2\right) \cdot r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - r^2\right) r \, dr \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = \frac{\pi}{32}. \blacksquare\end{aligned}$$

問 $z = x^2 + y^2$ と $z = 1 - x^2 - y^2$ で囲まれた部分 Ω の体積を求めよ。

($z = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ という形の式で定義される図形は、回転面である。$y = 0$ との交わりである (xz 平面内の曲線) $z = f(x)$ を描いてみれば、様子が分かる。)

1.7 広義積分

これまで、この「多変数関数の微分積分 2」では

有界 Jordan 可測集合上の**有界**な関数の積分

を扱って来た。この節では「有界」という条件を落した場合を考える。これは応用範囲が案外と広い (大学 1, 2 年次に現われるものに限っても、正規分布, Laplace 変換, Fourier 変換,⋯)。

実は、この種の積分は、Lebesgue 積分で取り扱うのがふさわしく、Riemann 積分の範囲ではあまりシャープな結果が得られない。そこで、ここでは欲張らず、実用上問題ない程度の結果で満足することにする。キーワードは「絶対収束」であり、無限級数とよく似たところがある。

[27] ここで大事なのは、D の決め方である。よく考えて納得すること。

1.7.1　1 次元の場合の復習

1 次元の広義積分については 1 年生で学んでいる。いくつか例をあげて、思い出してもらおう。

例 1.7.1 $\alpha > 0$ に対して

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

は? 積分範囲 $[1,\infty)$ は有界ではない。これを有界な区間 $[1,R]$ の $R\to\infty$ の極限と考えて、

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx := \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

と定義したのであった。

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty}\begin{cases}\left[\dfrac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1}\right]_1^R & (\alpha\neq 1)\\ [\log x]_1^R & (\alpha=1)\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1)\\ \infty & (0<\alpha\le 1).\blacksquare\end{cases}$$

例 1.7.2 $\beta > 0$ とするとき

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

は? $f(x) = \dfrac{1}{x^\beta}$ とおくと、

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = +\infty$$

であるから、f は $(0,1]$ で有界ではない。しかし、$0 < \forall\varepsilon < 1$ に対して、f は $[\varepsilon, 1]$ において有界で可積分である。そこで

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

と定義したのであった。結果は

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\begin{cases}\left[\dfrac{1}{1-\beta}x^{-\beta+1}\right]_\varepsilon^1 & (\beta\neq 1)\\ [\log x]_\varepsilon^1 & (\beta=1)\end{cases} = \begin{cases}+\infty & (\beta\ge 1)\\ \dfrac{1}{1-\beta} & (0<\beta<1).\blacksquare\end{cases}$$

上の二つの例は重要である。1 が収束発散の境目で、$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ では大きい側が収束、$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$ では小さい側が収束、いずれも境目の 1 では発散、というくらいは覚えるべきかもしれない。

問 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ の収束発散は？

例 1.7.3

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

積分範囲 $[0,\infty)$ は有界ではない。これを有界な区間 $[0,R]$ の極限と考えて、

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx := \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

と定義したのであった。

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\mathrm{Tan}^{-1}\,x\right]_0^R = \frac{\pi}{2}.$$

(ここで Tan^{-1} は tan の逆関数 $\arctan = \tan^{-1}$ の主値を表すものとする。) ■

例 1.7.4 (確率積分)

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

これは積分範囲が有界でないから

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx$$

と定義するわけだが、$f(x) := e^{-x^2}$ の原始関数の具体形が得られないので、この後の計算が難しい。しかし

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (x\in[0,1]) \\ \dfrac{1}{x^2} & (x\in[1,\infty)) \end{cases}$$

とおくと

$$|f(x)| \le g(x) \quad (x\in[0,\infty))$$

であること[28]、さらに

$$\int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$$

であることが分かる。ゆえに I は存在する。(後でこの I の値を実際に求める。) ■

1.7.2 素朴に始めてみる

基本的なアイディアは、“$K_n \to \Omega$” $(n\to\infty)$ となる $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を取って

$$\int_\Omega f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x)\,dx$$

とするというものである。“$K_n \to \Omega$” の定義はさておき、とりあえず走り出してみよう。

例 1.7.5 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を考える。積分範囲 $\Omega = \{(x,y); x^2+y^2\le 1\}$ は有界であるが、被積分関数 $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ の近傍では有界でない。実際

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty.$$

[28] 微分法で $x^2e^{-x^2}$ の増減を調べると、最大値 $1/e$ を持つことが分かるので、$x^2e^{-x^2} \le 1/e \le 1$. ゆえに $e^{-x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$.

そこで原点 $(0,0)$ を避けて

$$K_n := \left\{(x,y); \frac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le 1\right\} \quad (n \in \mathbf{N})$$

とおくと、これはコンパクトな Jordan 可測集合であり、その上で連続な f は当然積分可能である。実際、

$$\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\substack{1/n \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{1/n}^{1} dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

これから

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right) = 2\pi. \blacksquare$$

例 1.7.6 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\ge 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ を考える。今度は、積分範囲 $\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \ge 1\}$ は有界でない。一方、被積分関数 $f(x,y) = 1/(x^2+y^2)^2$ は Ω で有界である (実際 $|f(x,y)| \le 1$)。

そこで

$$K_n := \left\{(x,y); 1 \le x^2+y^2 \le n^2\right\} \quad (n \in \mathbf{N})$$

とおくと、これはコンパクトな Jordan 可測集合であり、

$$\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\substack{1 \le r \le n \\ 0 \le \theta \le 2\pi}} \frac{1}{(r^2)^2} \cdot r\,dr\,d\theta = \int_1^n \frac{1}{r^3}\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}r^{-2}\right]_1^n = \pi\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

これから

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \pi\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \pi. \blacksquare$$

1.7.3 反省

(ここは以下で導入する定義の「理由」を説明するところなので、ここを飛ばして次から読んでも、論理的な穴は生じない。むしろ最初はここを飛ばして、後からここに戻ってくる方が良いかもしれない。)

集合列の極限の定義

増大する集合列、つまり

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \cdots$$

の場合は合併集合

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

を極限とみなすのは不自然ではなかろう[29]。

[29] 一般の集合列の極限の定義というのは、ないわけではないが、あまりポピュラーではない。ここでは広義積分の定義をするのが目的であるから、この問題には首を突っ込まないことにする。

念のため:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n := \{x; \exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } x \in K_n\}.$$

明らかに、(a)「$\forall m \in \mathbf{N}$ に対して、$K_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$」, (b)「$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して $K_n \subset L$ ならば、$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset L$」が成り立つ。

注意: 集合について復習

二つの集合 A, B について、

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad \bigl(A \subset B \quad \text{かつ} \quad A \supset B\bigr)$$

に注意する。また

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x \in A)\, x \in B$$

である。

問　この注意に基づいて、(a), (b) を証明せよ。

例 1.7.6 では、確かに $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ が成り立つ (各自確めよ)。しかし例 1.7.5 では、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \setminus \{(0,0)\}$$

となっている[30]。

この点については、以下のように考える。Jordan 零集合 (Jordan 測度が 0 の集合) N が存在して、f は $\Omega \setminus N$ では定義されていて、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \setminus N$$

となっていればよいこととする。こうしてもおかしなことが起こらないことは (普通の積分を扱う場合に Jordan 零集合は「無視可能」だったことから) 想像できるであろう。

集合列の選び方の任意性

実は難しい問題は、Ω (あるいは Jordan 零集合を除いた $\Omega \setminus N$) が与えられたとき、

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$$

[30] 念のため証明しておくと、まず $K_n \subset \Omega \setminus \{(0,0)\}$ は明らかだから $\bigcup_n K_n \subset \Omega$. 一方 $(x,y) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$ については、$0 < x^2 + y^2 \le 1$ であるから、$0 < 1/n < x^2 + y^2$ を満たす $n \in \mathbf{N}$ が存在し、その n については $(x,y) \in K_n$. ゆえに $(x,y) \in \bigcup_n K_n$. そして任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $0 \notin K_n$ であるから、$0 \notin \bigcup_n K_n$.

を満たす集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の取り方は一つとは限らず、一般に無数に存在することである[31]。極限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x)\,dx \tag{1.14}$$

は、集合列 $\{K_n\}$ の取り方によって異なる結果を与える (収束したりしなかったり、たとえ収束しても値が異なる) 可能性がある。

この問題に対しては対処の仕方が二つある。

(a) $\{K_n\}$ の取り方を何か一つ指定してしまう

(b) どんな集合列 $\{K_n\}$ を取っても、(1.14) は共通の結果を与えることを確かめる

(a) の方針で得られる広義積分に「主値積分」と呼ばれるものがある。これについては、(もし時間があれば) 後述する…予定である。

ここでは主に (b) の方針を考える。これは、級数の収束発散の議論に通じるところがある[32]。

1. 関数の符号が一定の場合 (つねに $f\ge 0$ またはつねに $f\le 0$) は、極限 (1.14) は、集合列 $\{K_n\}$ の取り方によらないことを保証する定理があるので、比較的簡単である。
2. 関数の符号が一定でない場合は、まずは絶対収束 (後述) するかどうかを判定するのがよい。絶対収束するかどうかの判定は比較的簡単で (なぜなら $|f|$ の符号は一定であるから)、絶対収束する場合は、極限が $\{K_n\}$ の取り方によらないことが保証される。

1.7.4 広義積分の定義

ここから数学的な議論を始める。まず集合列 $\{K_n\}$ に要請する条件を明確にしよう。

集合列の添字に n を使うので、空間の次元は (いつもとは違って) ℓ という文字で表すことにする。

定義 1.7.7 (コンパクト近似列) $\Omega\subset\mathbf{R}^\ell$ とする。集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が Ω の**コンパクト近似列**であるとは、次の条件 (i)–(iii) が成り立つことをいう。

(i) $K_1\subset K_2\subset\cdots$. そして $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n=\Omega.$

(ii) 各 $n\in\mathbf{N}$ に対して、K_n は $\mathbf{R}^\ell$ のコンパクトな Jordan 可測集合である。

(iii) Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して、$K\subset K_n$ を満たす $n\in\mathbf{N}$ が存在する。

条件 (i) を課すのは自然であろう。

条件 (ii) を課す理由の一つは、K_n 上で普通の積分を考えるためのものである。普通の積分を考えるには、有界かつ Jordan 可測であることが必要であったが、少しだけおまけ (閉集合

[31]例えば、例 1.7.6 では、Ω に原点を中心とする丸い穴を開けたものを K_n としたが、穴が丸である必然性はなく、星形でも、ハート型でも、スペード型でも考えられる。もちろん、穴が丸い方が計算がずっと簡単になることは確かであるが、それはあくまで計算する人の都合に過ぎない。

[32]級数の収束・発散をマスターしていれば、以下の議論は見通し良く習得することができるだろう。

であること) してコンパクトとしたわけである。このおまけと、条件 (iii) を課す理由は、以下の命題 1.7.13 の証明を見れば理解できるであろう (この種の議論に慣れると、任意のコンパクト集合を飲み込むコンパクト集合列は、実現しやすい手頃なものであることが分かる)。

多変数の広義積分を定義するのに、このような近似列の導入はよくあるやり方だが、いつもこれと同じものが使われるわけではない。しかし基本的な考え方は同じであると言ってよいと思う (要するに命題 1.7.13 に類した事実を成立させる必要がある)。

なお、(iii) を仮定すると、(i) のうちの $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ は実は不要である[33]。

条件 (iii) のチェックは慣れないうちは難しいかもしれないが、以下の三つの例では $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ が成り立つので、次のように簡単に証明できる。実際、$\Omega \subset \bigcup_{n=1}^\infty K_n^\circ$ であるから、Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して $K \subset \bigcup_{n=1}^\infty K_n^\circ$. これは $\{K_n^\circ\}$ が K の開被覆ということだから、コンパクト集合の定義によって $\exists n_1, \dots, \exists n_r$ s.t. $K \subset \bigcup_{j=1}^r K_{n_j}^\circ$. $n_1, \dots, n_r$ のうちの最大のものを n^* とすると、任意の $j \in \{1, \dots, r\}$ に対して、$K_{n_j} \subset K_{n^*}$ であるから、$K \subset \bigcup_{k=1}^r K_{n_k}^\circ = K_{n^*}^\circ \subset K_{n^*}$. これは条件 (iii) が成り立つことを示している。

例 1.7.8 $\Omega := (0,1)$, $K_n := \left[\dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ とすると、$\{K_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は Ω のコンパクト近似列になる。■

例 1.7.9 $\Omega := \mathbf{R}^\ell$, $K_n := \{x \in \mathbf{R}^\ell; \|x\| \le n\}$ とすると、$\{K_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は Ω のコンパクト近似列になる。■

例 1.7.10 $\Omega := \mathbf{R}^\ell \setminus \{0\}$, $K_n := \{x \in \mathbf{R}^\ell; 1/n \le \|x\| \le n\}$ とすると、$\{K_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は Ω のコンパクト近似列になる。■

普通に考えられる大抵の「素直な」集合はコンパクト近似列を持ち、それを見つけるのは難しくないことが分かる[34]。

さて、これまで有界集合に対してのみ Jordan 可測性を定義してあったが、非有界集合まで拡張しておくべきであろう。

定義 1.7.11 (非有界集合の Jordan 可測性) Ω を $\mathbf{R}^\ell$ の非有界な部分集合とする。Ω が Jordan 可測であるとは、任意の正数 R に対して $\Omega \cap B(0;R)$ が $\mathbf{R}^\ell$ の (有界) Jordan 可測集合であることをいう (ここで $B(0;R) = \{x \in \mathbf{R}^\ell; \|x\| < R\}$ である)。

有界 Jordan 可測集合と非有界 Jordan 可測集合を Jordan 可測集合と総称する。

いよいよ広義積分の定義を述べよう。

[33] 任意の $x \in \Omega$ に対して、$K := \{x\}$ は Ω に含まれるコンパクト集合であるから、(iii) から $x \in K_n$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する。

[34] 複雑な形の集合については、「点と集合の距離」という概念を用いると便利なことがある。これについては「解析概論 I 講義ノート」(https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaisekigairon-1/ にある) の付録を参照せよ。

定義 1.7.12 (関数の符号が一致する場合の広義積分) Ω は $\mathbf{R}^\ell$ の Jordan 可測集合、$\Omega' \subset \Omega$, $f\colon \Omega' \to \mathbf{R}$ として、Ω の部分集合 N を

$$\begin{aligned} N &:= (f \text{ が定義されていない点全体}) \cup (\text{任意の近傍で } f \text{ が非有界となる点全体}) \\ &= (\Omega \setminus \Omega') \bigcup \{x \in \Omega; \exists \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ s.t. } \lim_{n\to\infty} y_n = x \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} |f(y_n)| = \infty\} \end{aligned}$$

で定めるとき、次の (a)-(c) が成り立つとする。

(a) N は Jordan 零集合である。

(b) f は $\Omega \setminus N$ に含まれる任意のコンパクト Jordan 可測集合 K の上で有界かつ積分可能である (つまり通常の積分 $\displaystyle\int_K f(x)\,dx$ が存在する)。

(c) $\Omega \setminus N$ は少なくとも一つのコンパクト近似列を持つ。

$\Omega \setminus N$ の任意のコンパクト近似列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x)\,dx$ が共通の極限を持つとき、f は Ω で**広義積分可能**であるといい、

$$\int_\Omega f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x)\,dx$$

を f の Ω 上の**広義積分** (**improper integral**) という。

f が Ω 上で広義積分可能であることを、f の Ω 上の**広義積分は収束する**といい、f が Ω 上で広義積分可能でないことを、f の Ω 上の**広義積分は発散する**ともいう。

かなり読みづらいが[35]、既にあげてある例 $\left(\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\right)$ などを念頭に解読してもらいたい。

条件 (b) は一見チェックが難しそうな条件であるが、(結局は不連続点全体が Lebesgue 零集合であればよいわけで) 例えば f が $\Omega \setminus N$ で連続であれば成り立てば十分であるので、問題となることは少ない。

Ω が有界 Jordan 可測で、f が Ω 上の積分可能な関数の場合、$\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ という記号は、普通の積分と広義積分の両方の意味に取ることができるが[36]、実は両者は一致するので矛盾は生じない (これは本当は証明の必要なことではあるが、ここでは省略する)。

$\Omega \setminus N$ のコンパクト近似列の取り方は一つではないので、共通の極限を持つことを確かめるのは非常に難しいと思えるかも知れない。しかし被積分関数 f の符号が一定の場合は、次の命題が成り立つので、コンパクト近似列を任意に一つ取って極限が存在するかどうかだけチェックすればよく、簡単である。f の符号が変化する場合については、次項で議論する。

[35]筆者は何とかすっきり述べるように努力をしたのだが、簡単にできなかった。ここら辺が Riemann 積分の不便さかもしれない。こう書くと、最初から Lebesgue 積分を説明すればよいと思われるかも知れないが、Lebesgue 積分の定義には長い時間がかかるし、Riemann 和の感覚はそれ自体修得する価値があるもので (Lebesgue 積分には Riemann 和は登場しない)、歴史の順番通りに、まず Riemann 積分を学ぶというのは適切であると考える。多くの微積分の教科書では、広義積分のところをかなりルーズに書いてあるが、厳密に書くと、このノートのように複雑になってしまうし、そのうち Lebesgue 積分できちんとやるのだから、ここは適当に流しておこうと判断したのであろう。

[36]いっそのこと、記号を分けることも考えられなくもないが、そうはしていないということである。

命題 1.7.13 (被積分関数の符号が一定ならばコンパクト近似列の取り方によらない) $\Omega \subset \mathbf{R}^\ell$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は、Ω 上で符号が一定で (つまり、つねに $f \geq 0$ であるか、つねに $f \leq 0$)、Ω に含まれる任意のコンパクト Jordan 可測集合 K 上で有界かつ積分可能であるとする。$\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{K'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を Ω のコンパクト近似列とするとき、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x)\,dx \quad と \quad \lim_{n\to\infty}\int_{K'_n} f(x)\,dx$$

は一致する (両方とも ∞ になるか、両方とも有限で値は等しい)。

証明 $f \geq 0$ の場合に証明する (そうでない場合も同様である)。

仮定から、任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$a_n := \int_{K_n} f(x)\,dx, \quad a'_n := \int_{K'_n} f(x)\,dx$$

が定義できる。$\{K_n\}$ と $\{K'_n\}$ は単調増大な集合列であるから、数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と $\{a'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は単調増加数列である:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots, \quad a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots$$

コンパクト近似列の条件 (iii) より、任意の $N \in \mathbf{N}$ に対して、

$$\exists n \in \mathbf{N} \quad \text{s.t.} \quad K'_N \subset K_n.$$

これから $a'_N \leq a_n$. ゆえに

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} a'_n \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n \quad (\text{一方または両方が } \infty \text{ となることもありうる}).$$

まったく同様に

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} a_n \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} a'_n \quad (\text{一方または両方が } \infty \text{ となることもありうる})$$

が得られるので

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} a_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} a'_n. \blacksquare$$

注意 1.7.14 (定義の批判的検討) 最初の例の関数

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ((x,y) \neq (0,0))$$

を思い浮かべて、N のことを単に f が未定義である点としたい人もいるかもしれない。しかし、$(0,0)$ での値を人工的に定義して

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

のような、どこでも定義された関数 $\widetilde{f}$ に修正してしまっても、f と $\widetilde{f}$ の (広義) 積分は同じであるようにしたいので (広義積分でない普通の積分では、「零集合上での関数の違いは積分に影響はない」ので、広義積分でもそうあって欲しいと考えるのは自然である)、そのような素朴な定義を採用するわけにはいかないのである。上の定義のようにしておけば、f でも $\widetilde{f}$ でも N は同じになり、広義積分の値も等しい。■

1.7.5　復習: 級数

数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が**絶体収束**するとは、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束することをいう。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が**絶体収束**するための必要十分条件は、部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ $(n \in \mathbf{N})$ が上に有界なことである。対偶を考えると、絶対収束しない $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が**条件収束**するとは、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するが絶対収束はしないことをいう。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶体収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。もっと強く、**可換収束**する (Dirichlet, 1837)。すなわち、任意の全単射 $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ に対して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\text{左辺も収束して右辺に等しい}).$$

実は逆も成り立つので、絶対収束 $\Leftrightarrow$ 可換収束。

各項が実数からなる級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束するならば、$\forall\lambda \in \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ に対して、ある全単射 $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ が存在して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \lambda$$

が成り立つ (Riemann, 1854)。

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすならば交代級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

は収束する (Leibniz, 1682)。

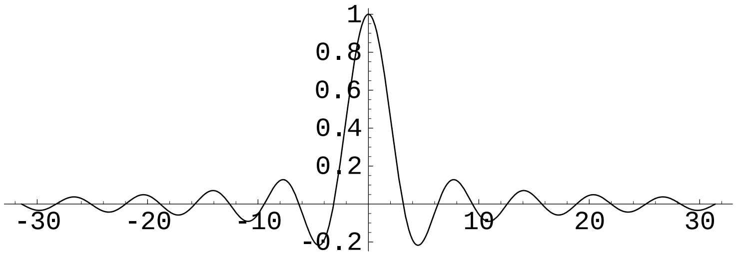
1.7.6　関数の符号が変化する場合の広義積分

関数の符号が一定でない、つまり正の値も負の値も取る場合を考えよう。このとき命題 1.7.13 が使えない。実際、コンパクト近似列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ によって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f(x)\,dx$ が異なる場合がある。次の例は (有名なので) もしかすると「実質的に復習」かもしれないが、重要な例であるし、解釈はあくまで新しい広義積分としてなので、あわてずゆっくりと分析してみよう。

例 1.7.15

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

を考えよう。$A_n := [(n-1)\pi, n\pi]$ とおくと、n が奇数のとき A_n 上 $f \ge 0$ (内部では $f > 0$), n が偶数のとき A_n 上 $f \le 0$ (内部では $f < 0$) となる。



$a_n := \displaystyle\int_{A_n} \frac{\sin x}{x}\,dx$ とおくと、

$$a_{2k-1} > 0, \quad a_{2k} < 0, \quad \frac{1}{n\pi} \le |a_n| \le \frac{1}{(n-1)\pi}, \quad |a_1| \ge |a_2| \ge \cdots \ge |a_n| \ge |a_{n+1}| \ge \cdots \to 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = -\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{(条件収束する交代級数)}$$

が成り立つ (最後の値が $\pi/2$ となること[37]以外の事実の証明は容易である)。

$K_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k = [0, n\pi]$ とおくと、$\{K_n\}$ は $\Omega = [0,\infty)$ のコンパクト近似列で、

$$\int_{K_n} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \to \frac{\pi}{2}.$$

(もう少しだけ頑張ると $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ が証明できるので、1 変数の微積分で学んだ広義積分と考えれば、広義積分可能で値は $\pi/2$ である。)

$\sum_n a_n$ が条件収束であるから、任意の $\lambda \in \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ に対して、全単射 $\varphi \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ が存在して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \lambda$$

となる (Riemann の定理)。

$K'_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_{\varphi(k)}$ とおくと、$\{K'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Ω のコンパクト近似列で、

$$\int_{K'_n} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_{\varphi(k)}} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \to \lambda \quad (n \to \infty).$$

コンパクト近似列の取り方によって、異なる極限を持つので、広義積分可能ではない。

(おまけ) $\Omega_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k-1}$, $\Omega_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ とおくと、f は Ω_1 で $f \ge 0$, f は Ω_2 で $f \le 0$ となり、

$$\int_{\Omega_1} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \infty, \quad \int_{\Omega_2} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = -\infty. \blacksquare$$

[37] この証明には色々な方法があるが、複素線積分を用いるのが最もポピュラーであろう。

この例のように Ω が 1 次元の区間の場合には、上の $K_n := [0, n\pi]$ という選択は自然だが、多次元の領域の場合には、これほど自然なものはなく、任意のコンパクト近似列に対して共通の極限値が存在することを要請するのはそれなりにもっともだろう。

級数の場合との連想で、被積分関数の絶対値 $|f|$ が広義積分可能であるとき、広義積分が**絶対収束する**という。$|f|$ は符号が一定であるので、絶対収束であるかどうかの判定は簡単である (任意に選んだ一つのコンパクト近似列 $\{K_n\}$ に対して、$\displaystyle\int_{K_n} |f(x)| dx$ が有界かどうかだけで判定できる)。

級数について基本的な「絶対収束ならば収束」の広義積分バージョンが成立する。

定理 1.7.16 (絶対収束するならば収束 (広義積分可能)) Ω, f, N は上の定義の条件 (a), (b), (c) を満たすとする。$\Omega \setminus N$ で定義された関数 φ で、

(i) $\Omega \setminus N$ で $|f| \le \varphi$. (特に $\varphi \ge 0$ となることに注意)

(ii) φ は Ω で広義積分可能である。

を満たすならば、f は Ω で広義積分可能である。

証明　各 $x \in \Omega \setminus N$ に対して

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$$

で f_+, f_- を定義すると、f_+ と f_- はともに $\Omega \setminus N$ に含まれる任意のコンパクト Jordan 可測集合上で積分可能で、

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad 0 \le f_+(x) \le |f(x)| \le \varphi(x), \quad 0 \le f_-(x) \le |f(x)| \le \varphi(x).$$

これから、

$$\int_{K_n} f_+(x)\, dx \le \int_{K_n} \varphi(x)\, dx \le \int_{\Omega} \varphi(x)\, dx < \infty,$$
$$\int_{K_n} f_-(x)\, dx \le \int_{K_n} \varphi(x)\, dx \le \int_{\Omega} \varphi(x)\, dx < \infty.$$

ゆえに $n \to \infty$ のとき $\displaystyle\int_{K_n} f_+(x)\, dx$, $\displaystyle\int_{K_n} f_-(x)\, dx$ は収束するので、f_+ と f_- は広義積分可能である。ゆえに $f = f_+ - f_-$ は Ω で広義積分可能である。■

系 1.7.17 広義積分が絶対収束するならば広義積分可能である。

証明　$\varphi := |f|$ とおけばよい。■

例 1.7.18 $\Omega = \{(x, y); x \ge 0,\ 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = e^{-x}\cos(xy)$ とするとき

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$$

を求めよ。
(解) f の符号は一定でないことに注意する。$|\cos(xy)| \le 1$ に注意すると

$$|f(x, y)| = \left|e^{-x}\cos(xy)\right| \le e^{-x}.$$

そこで $\varphi(x,y) := e^{-x}$ とおくと、$|f(x,y)| \le \varphi(x,y)$. $K_n := [0,n]\times[0,1]$ とおくと、$\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Ω のコンパクト近似列になる。

$$\iint_{K_n} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^n e^{-x}dx\right)dy = \left[-e^{-x}\right]_0^n = 1 - e^{-n} \to 1 \quad (n\to\infty).$$

φ の符号は一定なので

$$\iint_{\Omega} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \varphi(x,y)\,dx\,dy = 1 < \infty.$$

ゆえに φ は Ω で広義積分可能である。ゆえに $\displaystyle\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ は絶対収束する。

$$I_n := \iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^n e^{-x}\cos xy\,dx\right)dy$$

の右辺のカッコの中の積分を計算する。

$$\begin{aligned}
\int_0^n e^{-x}\cos xy\,dx &= \left[-e^{-x}\cos xy\right]_{x=0}^{x=n} - \int_0^n (-e^{-x})\cdot(-y\sin xy)dx \\
&= -e^{-n}\cos ny + 1 - y\int_0^n e^{-x}\sin xy\,dx, \\
\int_0^n e^{-x}\sin xy\,dx &= \left[-e^{-x}\sin xy\right]_0^n - \int_0^n \left(-e^{-x}\right)\cdot(y\cos xy)dx \\
&= -e^{-n}\sin ny + 0 + y\int_0^n e^{-x}\cos xy\,dx
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^n e^{-x}\cos xy\,dx &= 1 - e^{-n}\cos ny - y\left(-e^{-n}\sin ny + y\int_0^n e^{-x}\cos xy\,dx\right) \\
&= 1 + e^{-n}(y\sin ny - \cos ny) - y^2\int_0^n e^{-x}\cos xy\,dx.
\end{aligned}$$

移項して整理すると

$$\int_0^n e^{-x}\cos xy\,dx = \frac{1}{1+y^2} + e^{-n}\frac{y\sin ny - \cos ny}{1+y^2}.$$

ゆえに

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2} + e^{-n}\frac{y\sin ny - \cos ny}{1+y^2}\right)dy = \frac{\pi}{4} + e^{-n}\int_0^1 \frac{y\sin ny - \cos ny}{1+y^2}dy.$$

ここで

$$\begin{aligned}
\left|e^{-n}\int_0^1 \frac{y\sin ny - \cos ny}{1+y^2}dy\right| &\le e^{-n}\int_0^1 \frac{|y\sin ny - \cos ny|}{1+y^2}dy \\
&\le e^{-n}\int_0^1 \frac{1+y}{1+y^2}dy \le 2e^{-n} \to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{4}.$$

(上のようにまじめにやるのは大変だ。先に $n\to\infty$ として $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos xy\,dx = \frac{1}{1+y^2}$ を y について $[0,1]$ で積分することに帰着できると簡単だが、それを正当化するのはあまり簡単でなさそうだ。) ■

例 1.7.19 (収束を示すだけなら、上から収束する関数で押えるだけで OK) 広義積分

$$I = \iint_{x^2+y^2\ge 1} \frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4+x^2+1}\,dx\,dy$$

の収束・発散を調べてみよう。$\{K_n\}$ を一つ選んで、K_n 上の積分を計算しようと考えても出来るかも知れないが、少し計算が面倒である。

$$\frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4+x^2+1} \le \frac{1}{x^4+2x^2y^2+y^4} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

に気がつくと、

$$\iint_{x^2+y^2\ge 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

が収束するのを示すのは簡単なので、I が収束することが分かる。 ■

余談 1.7.1 (絶対収束=広義積分可能？) こうして「絶対収束ならば広義積分可能」であることが分かったが、絶対収束と広義積分可能の違いはどの程度あるのだろう？ (つまり絶対収束はしないが、広義積分可能である場合はどのくらいあるのか？) 実は両者には差がないという見解がある[38]。残念ながら筆者は証明を見たことがないが、状況証拠は色々あるし (級数が可換収束することは絶対収束することと同値、ルベーグ積分では f が可積分であることと $|f|$ が可積分であることは同値)、証明のあらすじも思い描ける。ただ厳密な証明を書き下すのは骨が折れそうなので、ここでは断定を避けておく。

(2009 年 9 月 2 日加筆) 稲葉 [3] で紹介されている

> E. V. Hobson, The Theory of Functions of a Real Variable, third edition, Cambridge (1927), pp. 518–533

は、今ではパブリック・ドメインにおかれているようで、ネットから無料で入手可能である (http://ia310142.us.archive.org/2/items/theoryfunctreal01hobsrich/theoryfunctreal01hobsrich.pdf)。読んでみるとよいかもしれない…と思ったのだが、やり始めて「はてな？」。ずばり書いてあるわけではなさそうだ。[3] でもう一つあげられている

> 福原満州雄, 微積分学 (数学解析第一巻), 至文堂 (1952), pp.398–400.

を見てみるかな… ■

[38] 杉浦・清水・金子・岡本 [15], 稲葉 [3] pp.216–217 など。

1.7.7 広義積分の計算の手引き

前項まで、結構長い議論となってしまったが、ここでは

「次の広義積分の収束・発散を調べよ」

あるいは

「次の広義積分を求めよ」

という問題に対して、どうすればよいか、まとめておこう。

1. まず Ω, f, N が何であるか、はっきりと認識しよう。
   (Ω と f の「式の形」は明らかだが、f が定義できていない点があるかどうか、また f がその点の任意の近傍で非有界となるような点があるかどうかチェックして、それらの点全体を N とおき、N が Jordan 零集合であることを確認する。)

2. f の符号が一定 (つまり常に 0 以上か、あるいは常に 0 以下) であれば、次の 3 に移る。f の符号が一定でなければ、絶対収束であるかどうかチェックする。例えば次のいずれかを行なう。

   (a) $\Omega\setminus N$ のコンパクト近似列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を (後の計算がなるべく楽になりそうに) 一つ選んで、$\displaystyle\int_{K_n}|f(x)|dx$ が極限を持つかどうか調べる。

   (b) 具体的な極限値が計算できなくても、無限大に発散するかどうかだけチェックすれば十分である。そこで $|f|\le\varphi$ なる関数 φ で、$\displaystyle\int_{K_n}\varphi(x)\,dx$ が収束するものがないかどうか調べる。

3. $\Omega\setminus N$ のコンパクト近似列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を一つ選んで、$\displaystyle\int_{K_n}f(x)\,dx$ を計算する。有限の値に収束すれば、それがこの広義積分の値である。

例 1.7.20 (被積分関数が非有界) すでに計算済みの広義積分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

を見直してみよう。$\Omega=\{(x,y);x^2+y^2\le 1\}$, $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $N=\{(0,0)\}$ である。$f\ge 0$ であるから、コンパクト近似列を一つ取って計算すればよい。

$$K_n=\{(x,y);1/n^2\le x^2+y^2\le 1\}$$

により定まる $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は、確かに $\Omega\setminus N$ のコンパクト近似列である。極座標変換

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\quad(r\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi])$$

によって K_n に対応するのは

$$D_n=\{(r,\theta);1/n\le r\le 1,\ \theta\in[0,2\pi]\}$$

である。よって、

$$\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_n} \frac{1}{r}\cdot r\,drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^1 dr = 2\pi\left(1-\frac{1}{n}\right) \to 2\pi \quad (n\to\infty).$$

ゆえに $I = 2\pi$. ■

例 1.7.21 (被積分関数が正負両方の値を取る) 広義積分

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

については、被積分関数が正にも負にもなるので、厳密には、まず

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{|y|}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

を調べることになる (つまり、絶対収束かどうか)。これが存在することは $K_n = \{(x,y); 1/n^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$ として、

$$\iint_{K_n} \frac{|y|}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{\substack{1/n\le r\le 1\\ \theta\in[0,2\pi]}} \frac{|r\sin\theta|}{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = 4(1-1/n) < 4$$

から簡単に分かる。それから後は、上の例と同じである。答は 0. これは対称性に気づけば明らかである (積分が存在することのチェックはサボるわけにはいかない— $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x\,dx$ などを考えてみよう)。 ■

例 1.7.22 (積分範囲が非有界) α を正の定数とするとき、広義積分

$$I = \iint_{x^2+y^2\ge 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

については、$\Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \ge 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$, $N = \emptyset$ (空集合) である。 $f \ge 0$ であるから、一つコンパクト近似列を取って計算すればよい。

$$K_n = \{(x,y); 1 \le x^2+y^2 \le n^2\}$$

とおくと、$\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Ω のコンパクト近似列で、極座標変換

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta \quad (r\ge 0,\ \theta\in[0,2\pi])$$

によって K_n に対応するのは

$$D_n = \{(r,\theta); 1\le r\le n,\ \theta\in[0,2\pi]\}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{D_n} \frac{1}{r^{2\alpha}}\cdot r\,drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^n r^{1-2\alpha} dr \\
&= 2\pi \times \begin{cases} \left[\dfrac{r^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}\right]_1^n = \dfrac{n^{2(1-\alpha)}-1}{2(1-\alpha)} & (1-2\alpha \ne -1) \\ [\log r]_1^n = \log n & (1-2\alpha = -1) \end{cases} \\
&\to \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha-1} & (\alpha > 1) \\ \infty & (\alpha \le 1) \end{cases} \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

ゆえに $\alpha > 1$ のとき広義積分は収束して値は $\pi/(\alpha-1)$, $0 < \alpha \le 1$ のとき広義積分は発散する。■

例 1.7.23 (確率積分) 確率論の正規分布[39]の話などに現れる

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

について考える。まず

$$\Omega = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2; x \ge 0, y \ge 0\},\quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

として、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

を考えよう。次式で Ω のコンパクト近似列 $\{K_n\}$, $\{C_n\}$ を定義する:

$$K_n = [0,n]\times[0,n],\quad C_n = \{(x,y); x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le n^2\}.$$

まず f は C_n で積分可能で、

$$\iint_{C_n} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2}) \to \frac{\pi}{4}.$$

$f \ge 0$ に注意すると、これから f は Ω で絶対収束していることが分かる。従って

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

ゆえに

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. ■$$

問 $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}$ を求めよ。

問 α を正定数とする。$\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\ge 1}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ が有限であるための条件と、そのときの積分の値を求めよ。

1.7.8 例 1.7.15 の後始末

a_n の符号

まず、$A_n^\circ = ((n-1)\pi, n\pi)$ において

$$\sin x\begin{cases} > 0 & (n \text{ が奇数}) \\ < 0 & (n \text{ が偶数})\end{cases}$$

であるから、($\sin x/x$ の符号も同じで)

$$a_n\begin{cases} > 0 & (n \text{ が奇数}) \\ < 0 & (n \text{ が偶数})\end{cases}$$

[39] 平均 m, 分散 σ^2 の正規分布の密度関数は $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ であるが、これを $\mathbf{R}$ 全体で積分すると 1 であることの確認等に必要である。

a_n の評価

まず

$$\left|\int_{A_n} \sin x\, dx\right| = \left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x\, dx\right| = \left|(-1)^{n-1}2\right| = 2 \tag{1.15}$$

を注意しておく。$n \geq 2$ のとき、

$$\frac{1}{n\pi} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{(n-1)\pi} \quad (x \in A_n^\circ)$$

であるから、$|\sin x|$ (> 0) をかけて積分すると

$$\frac{1}{n\pi}\int_{A_n} |\sin x| dx < \int_{A_n} \frac{|\sin x|}{x}\, dx < \frac{1}{(n-1)\pi}\int_{A_n} |\sin x| dx.$$

A_n で $\sin x$ で定符号であることから、絶対値を積分の外に出して、

$$\frac{1}{n\pi}\left|\int_{A_n} \sin x\, dx\right| < \left|\int_{A_n} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| < \frac{1}{(n-1)\pi}\left|\int_{A_n} \sin x\, dx\right|.$$

(1.15) から

$$\frac{2}{n\pi} < \left|\int_{A_n} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| < \frac{2}{(n-1)\pi} \quad \text{i.e.} \quad \frac{2}{n\pi} < |a_n| < \frac{2}{(n-1)\pi}.$$

$|a_n|$ が狭義単調減少すること

見易くするために $b_n := \dfrac{2}{n\pi}$ とすると、

$$b_{n-1} > |a_n| > b_n \quad (n \geq 2).$$

上の証明を見返すと $n = 1$ の場合も $|a_1| > \dfrac{2}{1 \cdot \pi} = b_1$ が成立することは明らかである。ゆえに

$$|a_1| > b_1 > |a_2| > b_2 > |a_3| > \cdots$$

ゴール

$\displaystyle\sum_n a_n$ は、符号が交互に変り、絶対値が単調減少して 0 に収束するので収束する。

$a_{2k-1} > 0,\ |a_{2k-1}| > \dfrac{2}{(2k-1)\pi}$ より $a_{2k-1} > \dfrac{2}{(2k-1)\pi}$ であるから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} = \infty \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \infty.$$

$a_{2k} < 0,\ |a_{2k}| > \dfrac{2}{(2k-1)\pi}$ より $a_{2k} < -\dfrac{2}{(2k-1)\pi}$ であるから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \leq -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} = -\infty \quad \text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = -\infty.$$

1.8 極限の順序交換 (項別積分)

1.8.1 はじめに

最初に問いかけから始める。次の 3 つの極限ははたして同じものであるだろうか？ (第 2 番目と第 3 番目は極限を取る順番を交換したもので、両者が等しいと主張することを「極限の順序交換が可能である」という。)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y), \quad \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y), \quad \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y).$$

答は「ケース・バイ・ケース」である。

解析学は極限概念を用いる数学であると言われる。実際、解析学には多くの極限が現れ (微分と積分も極限である！)、極限の順序交換は非常に重要な役割を果たすことが多い。

余談 1.8.1 一口に「代数、幾何、解析」というが、「解析」という語の意味は何だろう？聞いたことがない、考えたことがないという人が結構多いかも知れない[40]。辞書、辞典を引いてみると「極限の論法を用いて研究する数学の一分野」とか、そういう説明が書いてある。私が初めてそれを知ったときは第一感意外な感じがしたが、少し考えて「なるほど」と納得した。例えば大学初年級の学生にとっては、解析とは微積分のことと思われるかもしれないが、これはまさに極限の数学である。解析学は微分積分学を越えたところにも広大に広がっているのであるが、そこでも議論の基調は極限である。この節で顔を見せている「関数列の極限」がその代表的なものと言える。大学 1,2 年次の数学ではそれほど馴染みがないかもしれないが、例えば

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

という巾級数 (テイラー展開として頻出) は

$$f_n(x):=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k, \quad f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ということで関数列の極限の例となっている。■

例えば

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx=\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \quad (\text{項別積分}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{dx}(x)=\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \quad (\text{項別微分}),$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega f(t,x)\,dx=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx \quad (\text{積分記号下の微分, 微分と積分の順序交換})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) \quad (\text{偏微分の順序交換})$$

$$\int_A\left(\int_B f(x,y)\,dy\right)dx=\int_B\left(\int_A f(x,y)\,dx\right)dy \quad (\text{積分の順序交換})$$

のような等式が成り立つかどうかは、気になるところであろう。ところが、微分も積分もある種の極限演算であるから、これらはまさに極限の順序交換の問題に他ならない。

[40] かなり偉い先生が、私はつい最近まで「解析」という言葉の意味を調べたこともありませんでした、調べてみたところ…という話をしてくれたことがあります。

注意 1.8.1 (項別積分、項別微分の名の由来) 上の等式が項別積分、項別微分と言われるのは、それらの特別な (応用上は頻出する重要な) 場合として、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} f_n(x)\,dx = \int_{\Omega}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{df_n}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)$$

があるからである。 ■

例 1.8.2 ($\lim$ と $\int$ の順序交換が出来ない例 (1)) 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$f_n(x) := \frac{1}{1+(x-n)^2} \quad (x \in \mathbf{R})$$

とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\pi = \pi,$$

しかし

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0.\blacksquare$$

例 1.8.3 ($\lim$ と $\int$ の順序交換が出来ない例 (2) 魔女の帽子) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して、$f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$f_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & (x \le 0) \\ n^2 x & (0 \le x \le 1/n) \\ n^2\,(2/n - x) & (1/n \le x \le 2/n) \\ 0 & (x \ge 2/n) \end{array}\right\}$$

で定める (グラフを描こう)。少し考えれば

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

が分かる。これから

$$\int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

ところが $\forall n \in \mathbf{N}$ に対して、f_n のグラフを考えて三角形の面積を考えることにより

$$\int_0^2 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n = 1.$$

これから

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1.$$

ゆえに

$$\int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \ne \lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx.\blacksquare$$

つまり、無条件では $\lim$ の順序は交換できず、順序を交換できるためには、何か条件が必要であることが分かる。最も有名な十分条件は、以下に紹介する「一様収束すること」である。

1.8.2　関数族の一様収束と基本的性質

定義 1.8.4 (関数族の各点収束、一様収束) $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^N$ で、$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は各 $n \in \mathbf{N}$ につき $f_n\colon \Omega \to \mathbf{R}^N$ であるような関数列であるとする。

(1) $n \to \infty$ のとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が f に Ω 上で**各点収束**するとは、

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

が成り立つことをいう。

(2) $n \to \infty$ のとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が f に Ω 上で**一様収束**するとは、

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

が成り立つことをいう (Weierstrass, 1841)。

(本当はここで図を入れたいところである…)

例 1.8.2, 1.8.3 では、$n \to \infty$ のとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $f(x) \equiv 0$ に $\mathbf{R}$ で各点収束するが、一様収束はしていない。

命題 1.8.5 一様収束するならば各点収束する。

証明　(明らかなので省略) ■

次の定理は、複素関数論等で学んだはずである。

定理 1.8.6 (連続関数族の一様収束極限は連続関数, Weierstrass (1861)) $\Omega \subset \mathbf{R}^m$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^N$ で、$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は各 $n \in \mathbf{N}$ につき $f_n\colon \Omega \to \mathbf{R}^N$ であるような関数族であるとする。各 f_n が Ω 上連続で、$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が Ω 上一様に f に収束するならば、f は Ω 上連続である。

証明　任意の $x_0 \in \Omega$ に対して、f が Ω で連続であることを示そう。

まず、任意の $x \in \Omega$ に対して、

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &\le |f(x_0) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &\le 2\sup_{y\in\Omega} |f(y) - f_N(y)| + |f_N(x_0) - f_N(x)| \end{aligned}$$

が成り立つことに注意しよう。

$n \to \infty$ のとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が Ω 上で f に一様収束することから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、十分大きな番号 $N \in \mathbf{N}$ を取ると

$$\sup_{y\in\Omega} |f(y) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N は x_0 で連続であるから、$\exists \delta > 0$ s.t.

$$\forall x \in B(x_0; \delta) \cap \Omega \quad |f_N(x_0) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

このとき任意の $x \in B(x_0;\delta) \cap \Omega$ に対して、

$$|f(x_0) - f(x)| \le 2 \sup_{z\in\Omega} |f(z) - f_N(z)| + |f_N(x_0) - f_N(x)| \le 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \blacksquare$$

連続関数の各点収束極限は、連続とは限らない。

例 1.8.7 (極限が不連続となる連続関数列) $n \in \mathbf{N}$ に対して、

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & (x \le -\frac{1}{n}) \\ nx & (-\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n}) \\ 1 & (x \ge \frac{1}{n}) \end{cases}$$

で $f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を定めると、f_n は $\mathbf{R}$ 全体で連続で、任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

この f は 0 で連続でないことは明らかである。 ■

次の定理は応用上頻出する (これも複素関数論等で学んだはずである)。

定理 1.8.8 (Weierstrass の M テスト) $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 上の関数列で、

$$\exists \{M_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ s.t. } \sup_{x\in\Omega} |f_n(x)| \le M_n \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

を満たすものとすると、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は Ω 上一様に収束する。

証明　任意の $x \in \Omega$ に対して、

$$|f_n(x)| \le M_n \quad (n \in \mathbf{N}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

であるから、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は収束する (「絶対収束ならば収束」)。その極限を $S(x)$ で表す。

$$S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

であるから、

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束することから、

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad (\forall n \in \mathbf{N} : n \ge N) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

このとき任意の $x \in \Omega$ に対して、

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

これは $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ が $S(x)$ に一様収束することを意味する。 ■

1.8.3 項別積分定理と項別微分定理

次の定理が本題である (証明はやさしい)。

定理 1.8.9 (項別積分定理) Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Ω 上の有界で積分可能関数の列で、$n \to \infty$ のとき Ω で関数 f に一様収束するならば、f は Ω で有界かつ積分可能で、

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx$$

が成り立つ。

証明 実は、有界かつ積分可能な関数からなる関数列の一様収束極限は、有界かつ積分可能であることが証明できる (証明は準備中)。

$$\begin{aligned}\left| \int_\Omega f(x)\, dx - \int_\Omega f_n(x)\, dx \right| &= \left| \int_\Omega (f(x) - f_n(x))\, dx \right| \le \int_\Omega |f(x) - f_n(x)|\, dx \\ &\le \sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_n(x)| \int_\Omega dx = \mu(\Omega) \sup_{x\in\Omega} |f(x) - f_n(x)| \to 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

この定理の系として、次の命題が得られる。

定理 1.8.10 (項別微分定理) $\mathbf{R}$ の区間 $I = [a, b]$ 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $n \to \infty$ のとき、ある関数 f に I 上各点収束する。

(2) 導関数の列 $\{f_n'\}_{n\in\mathbf{N}}$ は、$n \to \infty$ のとき、ある関数 g に I 上一様に収束する。

を満たすとすると、f は I 上 C^1 級で、 $f' = g$ を満たす。

証明 任意の $x \in [a, b]$ に対して、

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\, dt$$

が成り立つ。$n \to \infty$ としたときの極限は

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\, dt.$$

g は連続関数の一様収束極限あるから連続であることに注意すると、

$$f'(x) = g(x). \blacksquare$$

この定理の応用として有名なものに巾級数の項別微分可能性

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} \quad \text{(収束円の内部で)}$$

がある。

1.8.4 積分記号下の微分

最も微積分らしいのは、積分と微分が同時に現れる次の定理であろう。

定理 1.8.11 (積分記号下の微分, 微分と積分の順序交換) A を $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな Jordan 可測集合、I を $\mathbf{R}$ の区間、$K = A \times I$, $f\colon A \times I \ni (x,t) \longmapsto f(x,t) \in \mathbf{R}$ を連続関数とすると、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $F(t) = \displaystyle\int_A f(x,t)\,dx$ は I 上で連続。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ が K 上連続ならば (とくに f が C^1 級ならば) $F \in C^1(I)$ かつ

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

すなわち

$$\frac{d}{dt}\int_A f(x,t)\,dx = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

証明 連続性も微分可能性も局所的な概念だから、I がコンパクトな区間 $[a,b]$ であるとして証明すれば十分である。

(1) K はコンパクトだから、連続関数 f は K 上で一様連続である。すなわち $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ $\forall (x,s) \in K\ \forall (y,t) \in K$

$$|(x,t)-(y,s)| < \delta \Longrightarrow |f(x,t)-f(y,s)| < \varepsilon.$$

とくに

$$|t-s| < \delta \Longrightarrow |f(x,t)-f(x,s)| < \varepsilon \quad (x \in A).$$

ゆえに

$$|F(t)-F(s)| \le \int_A |f(x,t)-f(x,s)|dx \le \int_A dx \le \varepsilon\mu(A).$$

ゆえに F は I で一様連続である。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ が K 上一様連続ならば (1) により

$$G(t) := \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

は I で一様連続である。そして積分の順序交換をして

$$\begin{aligned}\int_a^s G(t)\,dt &= \int_a^s \left(\int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\right)dt = \int_A \left(\int_a^s \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt\right)dx \\ &= \int_A [f(x,t)]_{t=a}^{t=s}\,dx \\ &= \int_A (f(x,s)-f(x,a))\,dx \\ &= F(s)-F(a).\end{aligned}$$

ゆえに $F'(s)=G(s)$. したがって $F\in C^1([a,b])$. ■

ところが、この定理は広義積分には、そのまま拡張することはできない。「広義積分が一様収束する」という条件 (この文書では定義を与えていない) を付加すれば大丈夫であるが、それは話が細かくなるので省略する[41]。

問　適当な条件下で

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x,t)\,dt = \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + f(x,x)$$

が成り立つことを示せ。(ヒント: $F(x,y) := \int_a^y f(x,t)\,dt$ とおき、F_x, F_y を求める。)

[41] このあたりの話は杉浦「解析入門 I」に詳しい。

参考にした文献

> 筆者が学生だった頃の教官の言葉に、「数学の勉強のための読書には精読と濫読の両方が必要である。まず、学生は理論の骨組みを理解するために、しっかりと書かれた教科書をきちんと通読する必要がある (とにかく一つのやり方で、首尾一貫とした話を理解すること、それは数学の勉強に絶対必要なことである)。その上で、その分野におけるさまざまな流儀に触れて、理解をより完全にするためにたくさんの本を読まねばならない」というのがあった。

ここでは、「多変数の微分積分学 2 第 1 部」の講義内容を作るために直接参考にした本を紹介する。この講義の前身である「微分積分学 2・同演習」の担当が決まった際に、微分積分学の本として定評のあるものを見直したのはもちろんであるが、書店で販売されていた本を片っ端から眺めていった。細かな点を参考にした本の数は多くなるが、本質的なところで参考にした本はあまり多くない。

中尾 [19] は最初のうち教科書に指定していた本であるが、次の理由から止めにした。

- 積分のところの記述が重く (難しく)、忠実にたどるのに講義時間が不足しがちになる。また学生が自習する際にも「胃にもたれそうな」感じがした。
- いくつか誤植があり、講義でそれを指摘しても、間違えたまま暗記した学生が後を絶たなかった (こういうのを理由にあげるのは情けないけれど…)。

この本が改訂されてこれらの問題が解決された場合は、教科書に返り咲く可能性があるが、現時点では教科書にするつもりはない (色々美点があって惜しい本であるが…)。

杉浦 [13], [14] は、非常に有名な本で、微積分のみならず複素関数論の優れた解説書である (大変な力作である)。必要になることは、ほとんどすべて書かれてある。この講義の内容を練る際にこの本を参考にしたところは多い[42]。しかし、平均的な学生の学力を考えると、この本を教科書に指定することは無理があるように思われた (つまみ食いにもそれなりの力が必要で、最初にこの本を読むのは難しそうということ)。一方、辞書として利用するのに和書でこれ以上の本はないと言って過言でない。卒研生[43]や大学院生には大いに勧めたい。

宮島 [28] は最近出版された本で、長年の講義で磨かれてできたものらしく、普通の本でさぼってあるようなことも書かれていて、色々と参考になった。しかしベクトル解析抜きでこの分量は重く、やはり初学者向きではないと思われる。

スピヴァック [17] は、有名な本で、筆者も学生の時に、多変数の微積分の副読本として読んだ。積分の定義や、積分可能条件のところの説明は大いに参考にした。しかし

[42] 自分でさんざん推敲した末にこの本を見ると、はるかに要領良く解説されていることが多く、最初から参考にした方が良かったかと思わされたことが何度かあった。

[43] 卒研の学生によく言うセリフ「微積分に関して、この本を見ないで『探したけれど見つかりませんでした』という言い訳は通りません。」

- 全体として「幾何学より」の記述であり、解析学の教科書としては抜け落ちたところが大きいこと。
- ベクトル解析部分の記述の仕方が高度に抽象的で、学生の自習書向きでないこと。

の二点から、やはり教科書として指定するのはためらわれた。この本は、幾何学で多様体論を学んだ後に、微分積分学を復習するという目的で読むのが良いであろう。少なくとも最初に学ぶ際に読む本ではないと思う。ただしこの本の演習問題の豊富さ (質量ともに) は特筆に値する。授業では計算問題にもそれなりの比重をおくことになるが、理論的な問題を探している人はぜひ一度目を通すことをお勧めする。

杉浦 [14] の序文にも述べられているように、微分積分学の入門段階に多様体を持ち込むことは、必要性を大いに感じるものの、まだうまいやり方が発見 (開発?) されていないようである。最初に微分積分学を学ぶ際に少し中途半端になってしまうのは仕方がないことなのかも知れない。

以上は固めの本を紹介したが、分かりやすく説明することを目標にした本は色々出ている。大きめの書店に立ち寄って自分と相性が良さそうな本を探してみてはいかが？個人的には、"Analysis by its history" という原題を持つハイラー・ワナー [33] が楽しく読めるので勧めてみたい[44]。

また比較的最近出た本の中で、落合・高橋 [5], 小林 [9] は説明が工夫されていて、なおかつ適度の重たさ (重量の点でも読みやすさの点でも) で、通読に向いていると思われる。

[44] この本はとにかく読むのが楽しい。多変数関数の微積分は、下巻の 100 ページほどの章に収められている。コンパクトながら本質的なところに鋭く切り込んでいる、という印象がある。集中力のある人は、授業を聴く前に、じっくりと一人で挑戦してみてはどうだろう。

参考図書

[1] 新井 仁之, ルベーグ積分講義, 日本評論社 (2003).

[2] 伊藤 清三, ルベーグ積分入門, 裳華房 (1963).

[3] 稲葉 三男, 新装版 微積分の根底をさぐる, 現代数学社 (2008).

[4] 岩掘 長慶, ベクトル解析 — 力学の理解のために —, 裳華房 (1960).

[5] 落合 卓四郎, 高橋 勝雄, 多変数の初等解析入門, 東京大学出版会 (2002).

[6] 金子 晃, 数理系のための基礎と応用 微分積分 I, II, サイエンス社 (2000, 2001).

[7] 桂田 祐史, 佐藤 篤之, 微分積分学 2 テキスト, 共立出版 (2006).

[8] 小平 邦彦, 解析入門, 岩波書店 (1991).

[9] 小林 昭七, 続 微分積分読本 — 多変数 —, 裳華房 (2001, 第 2 版 2002).

[10] 小松 彦三郎, ベクトル解析と多様体 I, II, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1994, 1995).

[11] L. シュヴァルツ, 解析学 1〜7, 東京図書 (1970〜1971).

[12] 志賀 浩二, ベクトル解析 30 講, 朝倉書店 (1990).

[13] 杉浦 光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).

[14] 杉浦 光夫, 解析入門 II, 東京大学出版会 (1985).

[15] 杉浦 光夫, 清水 英男, 金子 晃, 岡本 和夫, 解析演習, 東京大学出版会 (1989). 特に第 IV 章「積分法 II (多変数)」 (金子).

[16] J. スティルウェル著, 上野 健爾・浪川 幸彦 監訳, 田中 紀子 訳, 数学のあゆみ 上, 朝倉書店 (2005).

[17] マイケル・スピヴァック著, 齋藤 正彦 訳, 多変数解析学 — 古典理論への現代的アプローチ —, 東京図書 (1972).
最近 (2007) 復刊されて入手しやすくなっている。

[18] 高木 貞治, 解析概論 (改訂第三版), 岩波書店 (1983).

[19] 中尾 慎宏(みつひろ), 微分積分学, 近代科学社 (1987).

[20] 荷見(はすみ) 守助・堀内 利郎, 現代解析の基礎, 内田老鶴舗.

[21] 一松(ひとつまつ) 信(しん), 解析学序説 上, 下, 裳華房 (1962, 1963).

[22] 一松 信, 微分積分学入門第一〜四課, 近代科学社 (1989, 1990, 1990, 1991).

[23] ファインマン, レイトン, サンズ著, ファインマン物理学 III 電磁気学, 岩波書店 (1986).

[24] 俣野(またの) 博, 微分と積分 3, 岩波講座 現代数学への入門, 岩波書店 (1996).

[25] 溝畑 茂, 数学解析 (上, 下), 朝倉書店 (1976).

[26] 三村 征雄(ゆきお), 大学演習 微分積分学, 裳華房 (1955).

[27] 宮島 静雄, 微分積分学 I — 1 変数の微分積分 —, 共立出版 (2003).

[28] 宮島 静雄, 微分積分学 II — 多変数の微分積分 —, 共立出版 (2003).

[29] 宮島 静雄, 微分積分学としてのベクトル解析, 共立出版 (2007).

[30] 森田 茂之, 微分形式の幾何学, 岩波書店 (2005).
岩波講座現代数学の基礎の単行本化である。

[31] 吉田 耕作, 現代解析入門 後篇「測度と積分」, 岩波書店 (1991).

[32] コーシー著, 小堀憲 訳・解説, 微分積分学要論, 現代数学の系譜 1, 共立出版 (1975).
A. L. Cauchy, Résumé des Leçons sur le Calcul Infinitésimal (1823) の翻訳.

[33] E. ハイラー, G. ワナー, 解析教程 上, 下, シュプリンガーフェアラーク東京 (1997).

[34] ルベーグ著, 吉田耕作・松原稔 訳・解説, 積分・長さおよび面積, 現代数学の系譜 3, 共立出版 (1977).
H. Lebesgue, Intégrale, Longueur, Aire (1902) の翻訳と解説。

[35] 足立 恒雄, 杉浦 光夫, 長岡 亮介 編訳, リーマン論文集, 朝倉書店 (2004).

索 引

付 録A　復習：1変数関数の微積分の計算

A.1　指数関数、対数関数、逆三角関数、双曲線関数

A.1.1　指数関数と対数関数

「**自然対数の底**[1]」と呼ばれる数 e は次の (i), (ii), (iii) を満たす．

(i) $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

(ii) $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$　　($0! = 1$ である)．

(iii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = 1$ を満たすような正数 a はただ一つ存在し，それは e に等しい[2]．

例 A.1.1 (e の近似値を求める) 上の性質 (ii) を用いれば e の近似値をほどほどの効率で求めることができる（例えば 8 桁の電卓を使って精度一杯の値を求めるには $n = 10$ まで加えれば十分である）．参考まで小数点以下 40 桁までの値を掲げておく:

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\cdots\ \blacksquare$$

e を底とする指数関数 $y = e^x$ は，しばしば $\exp x$ とも書かれる：$e^x = \exp x$.
$\mathbf{R} \ni x \mapsto e^x \in (0,\infty)$ の逆関数を log と書く:

$$x = \log y \iff y = e^x.$$

これから，任意の正数 a に対して $a = e^{\log a}$ が成り立つ．$\log x$ を，x の自然対数と呼ぶ[3]。

問　指数関数の性質 $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^0 = 1$, $(e^x)^y = e^{xy}$ から対数関数の性質 $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log 1 = 0$, $\log x^y = y\log x$ を導け。

高等学校の数学では、1 でない任意の正数 a に対して、a を底とする指数関数 $y = a^x$ を考えたが、

$$a^x = \left(e^{\log a}\right)^x = e^{(\log a)x} = e^{x\log a} = \exp\left(x\log a\right)$$

のように e を底とする指数関数 $e^x = \exp x$ で表すことができる。今後は e を底とする指数関数だけですませることが多い[4]。

[1] Napier の数，Euler の数とも呼ばれる．
[2] 現在の高等学校の数学では，この性質で e を特徴づけることが多い．
[3] x の自然対数を $\ln x$ と書く流儀もあるが，ここでは数学者の習慣に従う。
[4] コンピューターのプログラミング言語には，e を底とする指数関数しか用意されていないこともある。

例 A.1.2 (放射性元素の崩壊) 放射性元素は (連鎖反応を起こさない限り) 時間の経過とともに一定の割合で原子数が減少する。もとの半分の原子数になるのに要する時間を半減期という。半減期が T である元素の原子数が時刻 0 で N_0 であったとするとき、時刻 t での原子数 N は

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$$

で与えられる。$\dfrac{1}{2} = \exp\left(\log\dfrac{1}{2}\right)$ であるから、

$$N = N_0 \exp\left(\frac{t}{T}\cdot\log\frac{1}{2}\right) = N_0 \exp\left(-\frac{t\log 2}{T}\right)$$

と、exp を用いて表すことができる。■

例 A.1.3 (微分方程式と指数関数) 「条件 $y' = ky$ をみたし、$x = 0$ のとき $y = 1$ となる関数 y を求めよ」のような問題が頻出する。この解を $y = a^x$ の形に表せるが、その場合 $a = e^k$ である。すなわち

$$y = a^x = (e^k)^x$$

となるが、これは e^{kx} とまとめるのが自然であろう。■

A.1.2　逆三角関数

$[-\pi/2, \pi/2] \ni x \mapsto \sin x \in [-1, 1]$ の逆関数を $\sin^{-1}$ または arcsin と書き，アークサインと読む．

$$x = \sin^{-1} y \quad\Longleftrightarrow\quad y = \sin x \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

$[0, \pi] \ni x \mapsto \cos x \in [-1, 1]$ の逆関数を $\cos^{-1}$ または arccos と書き，アークコサインと読む．

$$x = \cos^{-1} y \quad\Longleftrightarrow\quad y = \cos x \quad \text{かつ} \quad 0 \le x \le \pi.$$

$(-\pi/2, \pi/2) \ni x \mapsto \tan x \in (-\infty, \infty)$ の逆関数を $\tan^{-1}$ または arctan と書き，アークタンジェントと読む．

$$x = \tan^{-1} y \quad\Longleftrightarrow\quad y = \tan x \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

問　$f(x) = \sin^{-1} x$ (アークサインの主値) について以下の問に答えよ．
(1) 定義域と値域は何か．(2) $(f(x/a))'$ を求めよ．(3) $f(-\sqrt{3}/2)$ を求めよ．(4) $y = f(x)$ のグラフを描け．

問　$f(x) = \tan^{-1} x$ について以下の問に答えよ．(1) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ を示せ．(2) $f''(x)$ を求めよ．(3) $y = f(x)$ のグラフを描け (漸近線も描け)．

A.1.3　双曲線関数

念のため**双曲線関数** cosh, sinh, tanh の定義を復習しておく．

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

例 A.1.4 $\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ を示せ。
(解) $y = \sinh^{-1} x$ とおくと $x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. $Y = e^y$ とおくと $x = (Y - 1/Y)/2$ より

$$Y^2 - 2xY - 1 = 0.$$

この 2 次方程式の根は $x \pm \sqrt{x^2+1}$ であるが、$Y > 0$ に注意すると $Y = x + \sqrt{x^2+1}$. ゆえに

$$\sinh^{-1} x = y = \log Y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).\blacksquare$$

例 A.1.5 $\cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ を示せ。
(解) $\cosh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は全単射でない。制限した $f\colon [0,\infty) \ni x \mapsto \cosh x \in [1,\infty)$ は全単射になる。この逆関数が $\cosh^{-1}$ である。

$y = \cosh^{-1} x$ とおくと $x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. 上で述べたように $y \geq 0$ とするのが約束である。また $x \geq 1$ となることに注意する。

$Y = e^y$ とおくと、$Y \geq 1$, $x = (Y + 1/Y)/2$. 後者より

$$Y^2 - 2xY + 1 = 0.$$

この 2 次方程式は 2 実根 $Y_1 = x + \sqrt{x^2-1}$, $Y_2 = x - \sqrt{x^2-1}$ を持つが、実は $x > 1$ に対して $Y_1 > 1$ かつ $Y_2 < 1$ であるので (根と係数の関係から $Y_1Y_2 = 1$ であり、明らかに $Y_1 > 1$ なので $Y_2 < 1$) Y_2 は不適で、$Y = Y_1 = x + \sqrt{x^2-1}$. ゆえに

$$\cosh^{-1} x = y = \log Y = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).\blacksquare$$

問　tanh の逆関数である $\tanh^{-1}$ について以下の問に答えよ．
(1) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ を示せ．(2) $\left(\tanh^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ を示せ．

A.2　導関数の計算

基本的な関数の導関数を次の表に掲げる．

$f(x)$	$f'(x)$
c（c は定数）	0
x^n（n は自然数）	nx^{n-1}
x^n（n は負の整数,$x \neq 0$）	nx^{n-1}
x^α（α は実数,$x > 0$）	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{(\cosh x)^2}$

これらの関数の加減乗除および合成，逆（関数を作ること）により様々な関数が得られるが，それらの導関数は次の三つの定理（既に学んだものなので証明は略する）より計算可能である．

定理 A.2.1 (和，差，積，商の微分) f, g が微分可能な関数であるとき，$f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g（ただし g は 0 にならないとする）は微分可能で，

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\
(f-g)'(x) &= f'(x) - g'(x), \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

定理 A.2.2 (合成関数の微分法) f, g ともに微分可能で，合成関数 $g \circ f$ が考えられるとき，$g \circ f$ は微分可能で，

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

$z = g(y)$,$y = f(x)$ と表すと，$z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ であり，

$$\frac{dz}{dx} = (g \circ f)'(x), \quad \frac{dz}{dy} = g'(y), \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

と書けば，

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

という覚えやすい形の式になる．

定理 A.2.3 (逆関数の微分法) 関数 f とその逆関数 f^{-1} の両方が微分可能であるとき，

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{ただし} \quad y = f(x).$$

$y = f(x)$ と表すと $x = f^{-1}(y)$ であり，

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \frac{dx}{dy} = \left(f^{-1}\right)'(y)$$

と書けば，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

という覚えやすい形の式になる．

例 A.2.4 $f(x) = \log\left|x + \sqrt{x^2+k}\right|$ とするとき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(x + \sqrt{x^2+k}\right)'}{x + \sqrt{x^2+k}} = \frac{1 + \dfrac{1}{2}(x^2+k)^{1/2-1} \cdot (x^2+k)'}{x + \sqrt{x^2+k}} \\ &= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x + \sqrt{x^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

例 A.2.5 a を正の定数，$y = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ とするとき，$\dfrac{x}{a} = \sin y$,$-\pi/2 \le y \le \pi/2$. ゆえに

$$\frac{dx}{dy} = a\cos y = a\sqrt{1-\sin^2 y} = a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

従って，逆関数の微分法より

$$\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

($-\pi/2 \le y \le \pi/2$ であるから $\cos y \ge 0$ であり $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$, また $a > 0$ であるから $a = \sqrt{a^2}$ であることに注意せよ．) ■

A.3 原始関数の計算

原始関数の計算をかけ足で復習する。積分定数 C は省略する。

覚えておくべき原始関数

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^\alpha\ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\log x$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sec^2 x = 1/\cos^2 x$	$\tan x$
$\mathrm{cosec}^2 x = 1/\sin^2 x$	$-\cot x$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}\ (a>0)$	$\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$	$\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}}\ (k\in\mathbf{R})$	$\log\left\lvert x+\sqrt{x^2+k}\right\rvert$
$\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$	$\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$
$\sqrt{x^2+k}\ (k\in\mathbf{R})$	$\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k}+k\log\left\lvert x+\sqrt{x^2+k}\right\rvert\right)$

余談 A.3.1 数式処理系の Mathematica は、$1/\sqrt{x^2+k}$ の原始関数を場合によっては逆双曲線関数を用いて表す[5]。実際 $a>0$ に対して

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (x\in\mathbf{R}), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (x>a)$$

が成り立つ[6]。これを示すには $x=a\sinh u$ のような置換積分をするのが簡単である。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (x\in(-a,a))$$

という公式との類似性を大切にということであろう。■

これら公式以外に、まず**積分の線形性**と呼ばれる性質

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \qquad \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

は基本的である。

[5] 具体的には、$k>0$ の場合は ArcSinh $\dfrac{x}{\sqrt{k}}$ と答え、$k<0$ の場合は $\log\left(x+\sqrt{k+x^2}\right)$ と答える。なるほど…

[6] なお、$1/\sqrt{x^2-a^2}$ の原始関数を、$x<-a$ の場合も $\cosh^{-1}$ で書きたければ、$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{sign}\,x\cdot\cosh^{-1}\frac{|x|}{a}$. これはごたごたしてるので、$\log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert$ とするのが簡単であろう。

置換積分

置換積分の公式（積分の変数変換）

$$\int f(u)\,du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

は応用範囲が広い．普通は与えられた被積分関数が右辺の $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ の形になっていることを発見する必要があり、ある程度の慣れが必要である。

例えば $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき、

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b).$$

特に**対数積分**とも呼ばれる公式

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$$

も利用頻度が高い。例えば

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|\,, \quad \int \cot x\,dx = \log|\sin x|$$

なども該当する。

部分積分

部分積分の公式

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

は多くの非自明な結果を得るのに役立つ。

例 A.3.1 $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx = \int x\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int (x)'\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$. n を任意の自然数とするとき，$\displaystyle\int x^n e^{2x}\,dx$ は同様の部分積分を n 回実行して積分が計算できる． ■

例 A.3.2 $\displaystyle\int \log x\,dx = \int (x)'\cdot\log x\,dx = x\log x - \int x\cdot(\log x)'\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x$. ■

例 A.3.3 $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx = \int (e^x)'\cdot\cos x\,dx = e^x\cos x - \int e^x(\cos x)'\,dx = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx$. 移項して 2 で割り算することにより $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$.
■

例 A.3.4 k を任意の実数とするとき、

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+k}\,dx &= \int (x)' \cdot \sqrt{x^2+k}\,dx \\ &= x\sqrt{x^2+k} - \int x\left(\sqrt{x^2+k}\right)'\,dx \\ &= x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k}\,dx + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}.\end{aligned}$$

最後の辺の第 2 項を移項して 2 で割ることで

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+k}\,dx &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right). \blacksquare\end{aligned}$$

A.3.1 有理関数

有理式 (多項式/多項式の形の式) で与えられる**有理関数**は、例えば部分分数分解を利用することで原始関数が (原理的には) 必ず求められる。ここでは簡単な例をあげるにとどめる。

なお、$R(x, y)$ を x, y の有理式とするとき、$\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$, $\int R\left(x, \sqrt{x\text{ の 2 次式}}\right)dx$ 等は、いずれも有理関数の積分に帰着できるので、初等関数の範囲で積分が求まる。

例 A.3.5

$$I = \int \frac{dx}{x^2-1}.$$

部分分数への分解は

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

となる。

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|. \blacksquare\end{aligned}$$

例 A.3.6

$$I = \int \frac{x^4}{x^3-3x+2}\,dx.$$

分子を分母で割って,

$$x^4 = x(x^3-3x+2) + 3x^2 - 2x$$

が得られるから，

$$\frac{x^4}{x^3-3x+2}=\frac{x(x^3-3x+2)+3x^2-2x}{x^3-3x+2}=x+\frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2}.$$

ゆえに

$$I=\frac{x^2}{2}+J,\quad J:=\int\frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2}\,dx.$$

分母は $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ と因数分解されるから，

$$\frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$$

とおける．分母を払って，

$$3x^2-2x=A(x-1)^2+B(x+2)+C(x-1)(x+2).$$

$x=1$ を代入して整理すると $B=\dfrac{1}{3}$. $x=-2$ を代入して整理すると $A=\dfrac{16}{9}$. x^2 の係数を比較して $3=A+C$ となるので $C=3-A=3-\dfrac{16}{9}=\dfrac{11}{9}$. 以上より

$$\frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2}=\frac{16}{9(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)^2}+\frac{11}{9(x-1)}.$$

ゆえに

$$J=\frac{16}{9}\log|x+2|-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{11}{9}\log|x-1|$$

となるので

$$I=\frac{x^2}{2}+\frac{16}{9}\log|x+2|-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{11}{9}\log|x-1|.\ \blacksquare$$

付 録B　重積分の応用

ここでは重積分の応用のうちポピュラーな (数学科以外の人にも意味がわかりそうな) ものをいくつか紹介する。講義では時間の関係でカットを余儀なくされるかも知れない…

B.1　面積, 体積

(すでに説明して、例もいくつか示してあることだが、念のために繰り返すと) $\mathbf{R}^n$ の (Jordan 可測) 部分集合 Ω に対して、Ω の n 次元 Jordan 測度 $\mu_n(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega dx$ とは、$n=2$ のとき Ω の面積 (area)、$n=3$ のとき Ω の体積 (volume) であった。

後は単なる計算である。Ω が連立不等式で表される条件で定義されている場合は、比較的簡単に定理 1.4.8 や命題 1.4.20 を適用できることが多い。

「○○と□□と△△で囲まれた範囲」、「○○で切り取られた」などの表現で Ω が指定されている場合は、簡単な図を描いて、Ω を定義する条件を解読する必要がある (2 次元は比較的簡単だが、3 次元は多少の練習が必要かもしれない)。

B.2　密度と積分

イントロダクションで説明したように、積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ は、何かあるものが Ω 内に密度 f で分布しているとき、Ω 全体での総量を表す。

例えば、$\mathbf{R}^3$ 内の領域 Ω を占める物体があり、点 (x,y,z) における密度 (単位体積当りの質量) $\rho(x,y,z)$ が与えられているとする[1]。このとき、この物体の総質量は

$$M = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

である。これが良く分からないという場合は、Riemann 和

$$\sum_{j=1}^{\ell} \rho(\xi_j)\mu(A_j)$$

に戻って考えてみるとよい。$\rho(\xi_j)\mu(A_j)$ が、微小部分 A_j の質量の近似になっていることを理解しよう。

なお、例 B.3.1 も見ておくこと。

[1]「密度」は狭義には、単位体積当りの質量を意味するが (「水の密度は $1\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$」等)、広義には、ある量が単位体積・単位面積などに分布する割合を意味する。

B.3　平均値

Ω は $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測集合で、関数 $w\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は有界連続で正の値を取る関数とする。$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を有界連続とするとき、f の重み w の**加重平均** (weighted mean, weighted average) とは、

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)w(x)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega w(x)\,dx}$$

のことをいう。$w \equiv 1$ のとき、すなわち

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega dx} = \frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx}{\mu(\Omega)}$$

を単に f の**平均値** (mean, average) という。

$n=2$ の場合に、座標平面と関数のグラフで囲まれる立体図形の体積として解釈すると、体積割る底面積で平均の高さが求まる、ということである。

(加重平均については、離散的な場合に $\dfrac{\sum_i f_i w_i}{\sum_i w_i}$ となることを何か例をあげて説明しておき、照らし合わせる。)

例 B.3.1 (平均の極限として密度を得る) 連続関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ と、$a \in \Omega$ に対して、a を中心とする半径 r の閉球 B_r における f の平均

$$\frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r} f(x)\ dx$$

は $r \to 0$ のとき $f(a)$ に収束する。実際、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r} f(x)\ dx - f(a) &= \frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r} f(x)\ dx - f(a)\frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r} dx \\ &= \frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r} [f(x)-f(a)]\,dx\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r} f(x)\ dx - f(a)\right| &\le \frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r} |f(x)-f(a)|\,dx \\ &\le \sup_{x\in B_r}|f(x)-f(a)|\,\frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r} dx \\ &= \sup_{x\in B_r}|f(x)-f(a)|\,.\end{aligned}$$

f が a で連続であることから、この右辺は $r \to +0$ のとき 0 に収束する。ゆえに

$$\lim_{r\to+0}\frac{1}{\mu(B_r)}\int_{B_r} f(x)\ dx = f(a).\blacksquare$$

問　$f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ が連続のとき、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\ dx = f(c)$ $(c \in [a,b])$ を示せ。

B.4　重心

$\mathbf{R}^3$ において、ある物体の占める閉領域[2]を $\overline{\Omega}$, 点 (x,y,z) での密度を $\rho=\rho(x,y,z)$ とするとき、物体の**重心** (**barycenter**, **center of gravity**, **center of mass**) $\boldsymbol{g}=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ とは、

$$\overline{x}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$\overline{y}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$\overline{z}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

で定義される。ただし

$$M:=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad (\text{全質量}).$$

ベクトル形式で書き換えておくと

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{M}\int_\Omega \boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},\quad M=\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

次のように標語的にまとめられる:

重心とは、密度を重みとした座標の加重平均である。

本文中の例題 1.5.1 (p.64) が良い例である。

B.5　慣性モーメント

$\mathbf{R}^3$ において、ある物体の占める閉領域を $\overline{\Omega}$, 点 (x,y,z) での密度を $\rho=\rho(x,y,z)$ とする。ある定直線 ℓ から、物体 $\overline{\Omega}$ 上の各点 (x,y,z) までの距離を $p(x,y,z)$ とすれば、ℓ に関する物体 $\overline{\Omega}$ の**慣性モーメント** I は

$$I=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)p(x,y,z)^2\,dx\,dy\,dz$$

で定義される。また、この物体 $\overline{\Omega}$ の、直線 ℓ に関する**回転半径** R とは、

$$I=MR^2 \quad (M\ \text{は物体の全質量})$$

を満たす正数として定義される (要するに $R:=\sqrt{I/M}$ とする)。

[2]領域とは連結な開集合のこと。閉領域とは、ある領域の閉包となる集合のこと。

付 録C　コンパクト性と一様連続性

C.1　イントロ

本文中の多くの定理の証明中で次の定理を用いた。

(A)

$\mathbf{R}^n$ の任意の有界閉集合 K は**コンパクト**である。すなわち K の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ[a](通称「**Heine-Borel の定理**」)

[a]より具体的に書くと、K が $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるとき、$\mathbf{R}^n$ の開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $K\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を満たすならば、有限個の $\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in\Lambda$ が存在して、$K\subset\bigcup_{j=1}^r U_{\lambda_j}$ が成り立つ。

また閉方体上の連続関数の積分可能性 (記憶されるべき定理の筆頭！) の証明において、次の定理を用いた。

(B)

$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合上の任意の実数値連続関数は一様連続である (これは「コンパクト距離空間上の実数値連続関数は一様連続である」という定理の特別な場合である。)

この章では、このコンパクト性にまつわる二つの定理の証明を与える。

参考まで: この文書の姉妹編である「解析概論 I 講義ノート」(https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaisekigairon-1/ から入手可能) では、$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合が点列コンパクト[1]であることを利用して、上の (B) を証明してある[2]。ここではせっかく (A) を証明するので、コンパクト性 (任意の開被覆が部分被覆を持つこと) を利用した証明を与える。

この章に書いてあることは「解析学の常識」であって、参考文献はいくらでもあげることができるが、何か一冊面白いものをということならば、誰がいつどの結果を示したか書いてあるハイラー・ワナー [33] をあげておこう。

C.2　Heine-Borel の定理

Heine-Borel の定理は、入門段階の解析学で「難所」と捉えられているように思う。ところが積分に関する議論をたくさんしていると、定理の内容も、以下に与える証明も、実に自然で簡単なものに感じられるのではないだろうか。

[1]K が点列コンパクトであるとは、K 内の任意の点列が、K の点に収束する部分列を持つことをいう。

[2]そこでは「とりあえず使わずにすむ」という理由で Heine-Borel の定理の証明は省略した (省略できた)。積分論になって Heine-Borel の定理を多用することになったのは、不勉強な筆者には「そういうものなのだ」と勉強になった。

余談であるが、複素函数論で有名な Cauchy の積分定理の Goursat による証明 (高木貞治の解析概論に載っているので有名) と話の筋道がとてもよく似ている。やる気のある人は並べて読んでみることをお奨めする。

定理 C.2.1 (Heine-Borel の定理, Heine (1872), Borel (1895)) K が $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるとき、K の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ。

証明 背理法による。$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の開被覆として、これが有限部分被覆を持たない、すなわち K を被覆するには無限個の U_λ が必要である (K は有限個の U_λ では決して被覆されない) と仮定して矛盾を導く。

K を含む閉方体 A を取る。A の各辺を中点で分割した相似比 1/2 の小閉方体 $A_\ell^{(1)}$ ($\ell = 1,2,\dots,2^n$) を考える。$K\cap A_\ell^{(1)}$ のうち少なくとも 1 つは、それを被覆するために無限個の U_λ が必要になる (もしそうでなければ K が有限個の U_λ で被覆されることになり、仮定に反する)。そのような小閉方体の一つ $K\cap A_{\ell_1}^{(1)}$ を選び、K_1 とおく。次に $A_{\ell_1}^{(1)}$ をまた小閉方体 $A_\ell^{(2)}$ ($\ell = 1,2,\dots,2^n$) に分けて同じことをする。これを続けて集合列

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$$

で、任意の j について、K_j は決して有限個の U_λ では被覆されず、K_j の直径は A の直径の $1/2^j$ 以下であるようなものが取れる。

各 K_j から点 x_j を取って点列 $\{x_j\}$ を作ると、K_j の直径が A の直径の $1/2^j$ 以下であることから、$\{x_j\}$ は Cauchy 列となる。ゆえに $\mathbf{R}^n$ 内に極限 a を持つが、K が閉集合であることから $a\in K$ である。任意の j について $a\in K_j$ であることを注意しておく。

$a\in K\subset\bigcup U_\lambda$ であるから、$a\in U_{\lambda_0}$ となる $\lambda_0\in\Lambda$ が存在する。U_{λ_0} は開集合であるから、$B(a;\varepsilon)\subset U_{\lambda_0}$ をみたす $\varepsilon>0$ が存在する。

十分大きな N を取ると、K_N の直径は ε より小さくなるので、$K_N\subset B(a;\varepsilon)$. すると、

$$K_N \subset B(a;\varepsilon)\subset U_{\lambda_0}.$$

これは K_N がただ 1 つの U_{λ_0} で被覆されることを示していて、矛盾である。■

C.3 コンパクト距離空間上の連続関数は一様連続

定理 C.3.1 (Heine (1872)) コンパクトな距離空間 (X,d) 上の任意の連続関数 $f\colon X\to\mathbf{R}$ は一様連続である。

証明 $a\in X$, $r>0$ に対して $B(a;r):=\{x\in X; d(x,a)<r\}$ とおく。

f は X で連続という仮定から、$\forall\varepsilon>0$ に対して、

$$\forall x\in X\quad \exists\delta_x>0\quad \forall x'\in B(x;\delta_x)\quad |f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

各 $x\in X$ に対してこのような δ_x を取っておく。もちろん

$$\bigcup_{x\in X} B(x;\delta_x/2) = X$$

であるが、X はコンパクトであるから、$\exists x_1, x_2, \dots, x_\ell \in X$ s.t.

$$\bigcup_{j=1}^{\ell} B(x_j; \delta_{x_j}/2) = X. \tag{C.1}$$

$\delta := \min_{1 \le j \le \ell} \delta_{x_j}/2$ とおくと $\delta > 0$ であるが、y, $z \in X$ が $d(y,z) < \delta$ を満たせば

$$|f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

が成り立つ (ゆえに一様連続性が示される)。実際、まず (C.1) より $\exists j$ s.t. $y \in B(x_j; \delta_{x_j}/2)$. このとき

$$d(z, x_j) \le d(z,y) + d(y, x_j) < \delta + \frac{\delta_{x_j}}{2} \le \frac{\delta_{x_j}}{2} + \frac{\delta_{x_j}}{2} = \delta_{x_j}.$$

ゆえに $z \in B(x_j; \delta_{x_j})$. またもちろん $y \in B(x_j; \delta_{x_j})$. ゆえに

$$|f(y) - f(z)| \le |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \blacksquare$$

Heine-Borel の定理とあわせて、次の系 (目標だった (B)) を得る。

系 C.3.2 $\mathbf{R}^n$ の空でない有界閉集合 K で定義された実数値連続関数は一様連続である。

付 録D　変数変換の公式についての補足

D.1　変数変換の公式の証明

(主に杉浦 [13], 宮島 [28] などを参考にした。)
本文中の定理 1.5.2 の証明を目標とする。

補題 D.1.1 (平行移動で可測性、測度は変わらない) Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、$a \in \mathbf{R}^n$ として、$\varphi(x) = x + a$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ とおくとき、$\varphi(\Omega)$ も有界 Jordan 可測で、$\mu(\varphi(\Omega)) = \mu(\Omega)$.

証明　(一応証明を書いておくが、当たり前のことしか書いていないし、「明らか」で飛ばしても構わない。)　A を $\overline{\Omega} \subset A^\circ$ となる $\mathbf{R}^n$ の閉方体とする。$\varphi(A)$ も $\mathbf{R}^n$ の閉方体で、平行移動の同相性から $\overline{\varphi(\Omega)} \subset \varphi(A)^\circ$.

A の分割全体 $\mathcal{P}(A)$ と $\varphi(A)$ の分割全体 $\mathcal{D}(\varphi(A))$ は、自然に一対一に対応する。実際、$\Delta = (\Delta_1, \cdots, \Delta_n) \in \mathcal{P}(A)$, $\Delta_j = \{x_j^{(i)}\}_{0 \le i \le \ell_j}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ に対して、$\Delta' = (\Delta'_1, \cdots, \Delta'_n) \in \mathcal{D}(\varphi(A))$ を $\Delta'_j = \{x_j^{(i)} + a_j\}_{0 \le i \le \ell_j}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ として定めればよい。このとき、

$$L(\chi_\Omega, A, \Delta) = L(\chi_{\varphi(\Omega)}, \varphi(A), \Delta'), \quad U(\chi_\Omega, A, \Delta) = U(\chi_{\varphi(\Omega)}, \varphi(A), \Delta').$$

ゆえに

$$L(\chi_\Omega, A) = L(\chi_{\varphi(\Omega)}, \varphi(A)), \quad U(\chi_\Omega, A) = U(\chi_{\varphi(\Omega)}, \varphi(A)).$$

Ω の可測性から $L(\chi_\Omega, A) = U(\chi_\Omega, A) = \mu(\Omega)$ であるから、$L(\chi_{\varphi(\Omega)}, \varphi(A)) = U(\chi_{\varphi(\Omega)}, \varphi(A)) = \mu(\Omega)$. ゆえに $\varphi(\Omega)$ は可測で、$\mu(\varphi(\Omega)) = \mu(\Omega)$. ■

補題 D.1.2 (超平面に含まれる有界集合は測度 0) B は $\mathbf{R}^n$ の有界集合で、$\mathbf{R}^n$ のある超平面に含まれるとするとき、B は Jordan 可測で $\mu(B) = 0$.

証明　(命題 1.3.6 を用意したので、この証明は省いてもよいかもしれない…)　B は有界であるから、$\mathbf{R}^n$ の閉方体 A で $\overline{B} \subset A^\circ$ となるものが取れる。以下 $U(\chi_B, A) = 0$ を証明する。もしこれができれば、

$$0 \le L(\chi_B, A) \le U(\chi_B, A) \le 0$$

から、B は Jordan 可測で $0 = \displaystyle\int_B dx = \mu(B)$ であることがわかる。

本質は変らないので、以下 $n = 2$ として証明する。$\mathbf{R}^2$ の超平面 (直線！) H は、1 変数 1 次関数 (すなわち $y = px + q$ または $x = ry + s$) のグラフとして表すことができる。ここでは $y = f(x) = px + q$ のグラフであるとしよう。A の x 軸への射影を $A' = [a, b]$ として、また $c = \min\{f(a), f(b)\}$, $d = \max\{f(a), f(b)\}$ とおく。$c = d$ のときは簡単なので、$c < d$ とする。任意に与えられた正数 ε に対して、

$$\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in A' \quad (\forall x' \in A' : |x - x'| \le \delta) \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2\mu(A')}.$$

N を十分大きく取って、A' の N 等分割 $\Delta_1 = \{x_j\}_{j=0}^N$ が $|\Delta_1| \le \delta$ となるようにする。$A'_j := [x_{j-1}, x_j]$ とおく。このとき、すべての $f(x_j)$ を分割点として含むような $[c,d]$ の分割を Δ_2 とする。$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ とすると、これは $A = [a,b] \times [c,d]$ の分割で、

$$U(\chi_H, A, \Delta) \le \sum_{j=1}^N \mu(A'_{j-1}) \cdot 2\frac{\varepsilon}{2\mu(A')} = \frac{\varepsilon}{\mu(A')} \sum_{j=1}^N \mu(A'_j) = \varepsilon.$$

これは $U(\chi_H, A) = 0$ であることを示している。ゆえに $U(\chi_B, A) = 0$ である。■

系 D.1.3 (閉方体のアフィン変換による像 (平行体) は Jordan 可測) A は $\mathbf{R}^n$ の閉方体、$g \in M(n; \mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^n$ とするとき、$\varphi(x) = gx + b$ $(x \in \mathbf{R}^n)$, $\Omega := \varphi(A)$ とおくと、Ω は Jordan 可測である。

証明 $\partial\Omega$ はある超平面に含まれる有界集合の有限個の合併であるから、$\partial\Omega$ は可測で $\mu(\partial\Omega) = 0$. ゆえに Ω は可測である。■

命題 D.1.4 (アフィン変換は Jordan 測度を行列式の絶対値倍にする) Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界な Jordan 可測集合, $g \in M(n; \mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^n$ とするとき、$\varphi(x) := gx + b$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ とおくと、$\varphi(\Omega)$ は $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測集合で、

$$\mu(\varphi(\Omega)) = |\det g|\, \mu(\Omega).$$

証明

Step 1. $b = 0$ かつ $\det g \ne 0$ のときに示せば十分であることを示す。

まず、補題 D.1.1 より、平行移動で Jordan 可測性、Jordan 測度は不変であるから、$b = 0$ としてよい。

また $\operatorname{Im}\varphi = R(g)$ は $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間で、$\det g = 0$ のとき $\dim R(g) = \operatorname{rank} g < n$ ゆえ、$\operatorname{Im}\varphi$ は $\mathbf{R}^n$ のある超平面に含まれる。ゆえに Ω が $\mathbf{R}^n$ の有界集合ならば、$\varphi(\Omega)$ は補題 D.1.2 の仮定をみたし、$\mu(\varphi(\Omega)) = 0$. これは $|\det g|\,\mu(\Omega) = 0 \cdot \mu(\Omega) = 0$ に等しい。

Step.2 もしも $\mathbf{R}^n$ の任意の閉方体 A に対して

$$\mu(\varphi(A)) = |\det g|\, \mu(A)$$

が示せれば命題は証明される (任意の有界 Jordan 可測集合 Ω に対して、$\mu(\varphi(\Omega)) = |\det g|\,\mu(\Omega)$ が成り立つ) ことを示す。

Ω を $\mathbf{R}^n$ の任意の有界 Jordan 可測集合とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、区間塊 (有限個の閉方体の合併) K_1, K_2 で、

$$K_1 \subset \Omega \subset K_2, \quad \mu(K_2) - \mu(K_1) = \mu(K_2 \setminus K_1) < \varepsilon$$

を満たすものが存在する[1]。これから、まず[2]

$$\mu(\Omega) - \varepsilon \le \mu(K_1) \le \mu(\Omega) \le \mu(K_2) \le \mu(\Omega) + \varepsilon.$$

[1] χ_Ω の可積分性から、$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\Delta$ s.t. $U(\chi_\Omega, A, \Delta) - L(\chi_\Omega, A, \Delta) < \varepsilon$. これは $\displaystyle\sum_{A_j \cap \Omega \ne \emptyset} \mu_n(A_j) - \sum_{A_j \subset \Omega} \mu_n(A_j) < \varepsilon$ を意味するので、$K_1 := \displaystyle\bigcup_{A_j \subset \Omega} A_j$, $K_2 := \displaystyle\bigcup_{A_j \cap \Omega = \emptyset} A_j$ とおけばよい。

[2] $\mu(K_1) \le \mu(\Omega) \le \mu(K_2)$ で、両端の差が ε 以下だから。

一方、$\varphi(K_1)\subset\varphi(\Omega)\subset\varphi(K_2)$ より、$\overline{\varphi(K_2)}\subset A'^{\circ}$ をみたす閉方体 A' を取ると、

$$\mu(\varphi(K_1))=L(\chi_{\varphi(K_1)},A')\le L(\chi_{\varphi(\Omega)},A')\le U(\chi_{\varphi(\Omega)},A')\le U(\chi_{\varphi(K_2)},A')=\mu(\varphi(K_2)).$$

(閉方体の φ による像は Jordan 可測なので、$\varphi(K_1)$, $\varphi(K_2)$ が Jordan 可測であるが、$\varphi(\Omega)$ については可測性は明らかでないので、上積分、下積分を持ち出して議論している。)

φ が閉方体の Jordan 測度を $|\det g|$ 倍にすることから、区間塊の Jordan 測度も $|\det g|$ 倍にすることがわかる。ゆえに

$$\begin{aligned}\mu(\varphi(K_1))&=|\det g|\,\mu(K_1)\ge|\det g|(\mu(\Omega)-\varepsilon),\\ \mu(\varphi(K_2))&=|\det g|\,\mu(K_2)\le|\det g|(\mu(\Omega)+\varepsilon).\end{aligned}$$

ゆえに

$$|\det g|\,(\mu(\Omega)-\varepsilon)\le L(\chi_{\varphi(\Omega)},A')\le U(\chi_{\varphi(\Omega)},A')\le|\det g|\,(\mu(\Omega)+\varepsilon).$$

これが任意の $\varepsilon>0$ について成り立つことから

$$L(\chi_{\varphi(\Omega)},A')=U(\chi_{\varphi(\Omega)},A')=|\det g|\,\mu(\Omega).$$

ゆえに $\varphi(\Omega)$ は Jordan 可測で $\mu(\varphi(\Omega))=|\det g|\,\mu(\Omega)$ である。

Step 3. 次の補題を示せば十分であることを示す。

補題 D.1.5 Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界 Jordan 可測集合、E を n 次の基本行列、$\psi(x)=Ex$ $(x\in\mathbf{R}^n)$ とするとき、$\psi(\Omega)$ は有界 Jordan 可測で $\mu(\psi(\Omega))=|\det E|\,\mu(\Omega)$.

以下に掲げる補題 D.1.6 より、g は基本行列の積として表される。そこで $g=E_1E_2\cdots E_\ell$ (E_j は基本行列) とするとき、$\psi_j\colon x\mapsto E_jx$ として、$\varphi=\psi_1\circ\psi_2\circ\cdots\circ\psi_\ell$ であるから、

$$\begin{aligned}\mu(\varphi(\Omega))&=|\det E_1|\,|\det E_2|\cdots|\det E_\ell|\,\mu(\Omega)\\ &=|\det(E_1E_2\cdots E_\ell)|\,\mu(\Omega)=|\det g|\,\mu(\Omega).\blacksquare\end{aligned}$$

基本行列について復習しておこう。次の 3 つの形の行列を基本行列と呼ぶのであった。

$$\text{(D.1)}\qquad P(i,j):=I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}$$

$$=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&&&&1&&&\\&&&&1&&&&&&\\&&&&&\ddots&&&&&\\&&&&&&1&&&&\\&&&1&&&&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\qquad(i\ne j),$$

$$
Q(i,j,a) := I + aE_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & a & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i \neq j,\ a \in \mathbf{R}), \tag{D.2}
$$

$$
R(i,c) := I + (c-1)E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbf{R},\ c \neq 0). \tag{D.3}
$$

ここで E_{pq} は、(p,q) 成分のみ 1 で、他の成分は 0 である行列を表す。

補題 D.1.6 任意の $g \in GL(n;\mathbf{R})$ は有限個の基本行列の積として表せる。

証明 線形代数で「任意の正則行列は有限回の基本変形で単位行列に変換できる」と学んだ。それと「任意の基本行列の逆行列は基本行列である」から明らか。■

命題 D.1.7 A は $\mathbf{R}^n$ の閉方体、g は基本行列 ((D.1), (D.2), (D.3) のいずれかの行列) とするとき、

$$
\mu(\varphi(A)) = |\det g|\, \mu(A), \quad \varphi(x) := gx. \tag{D.4}
$$

注: 閉方体 $A = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ の Jordan 測度は $\prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ であった (それがそもそもの定義で、後で Jordan 測度を拡張したとき、矛盾がないことを確認してある。)。

証明

(1) $g = R(i,c)$ のときは、第 i 辺の長さだけが $|c|$ 倍されるから、Jordan 測度も $|c|$ 倍される。$\det g = c$ なので、$|c| = |\det g|$ であるから、(D.4) が成り立つ。

(2) $g = P(i,j)$ のときは、$\varphi(A)$ は A の第 i 辺と第 j 辺が入れ替わっただけだから、$\mu(\varphi(A)) = \mu(A)$ である。$\det g = -1$ なので $|\det g| = 1$ であるから、(D.4) が成り立つ。

(3) $g = Q(i,j,a)$ の場合。まず Fubini の定理より、「A, B がそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の有界 Jordan 可測集合であるとき、$\mu_{n+m}(A \times B) = \mu_n(A)\mu_m(B)$ である」が成り立つことを注意しておく。記述を簡単にするため、$i = n-1$, $j = n$ としよう (一般には (2) の置換行列を利用すればよい)。$y = gx$ とすると、

$$
y_k = x_k \quad (k = 1,2,\cdots,n-2), \quad y_{n-1} = x_{n-1} + ax_n, \quad y_n = x_n
$$

となる。$A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ として、$A' = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-2}, b_{n-2}]$, $A'' = [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n]$ とおくと、

$$\varphi(A) = A' \times \psi(A''),$$

ただし $\psi(x_{n-1}, x_n) := (x_{n-1} + ax_n, x_n)$. $\psi(A'')$ は平行四辺形で、底辺と高さはそれぞれ A'' (これは長方形だが) のそれと等しいので、$\mu_2(\psi(A'')) = \mu_2(A'')$. ゆえに

$$\begin{aligned}\mu_n(\varphi(A)) &= \mu_n(A' \times \psi(A'')) = \mu_{n-2}(A')\mu_2(\psi(A'')) = \mu_{n-2}(A')\mu_2(A'') = \mu_n(A' \times A'') \\ &= \mu_n(A).\end{aligned}$$

$\det g = 1$ であるから、これは (D.4) が成り立つことを示している。■

定理 1.5.2 の証明 φ は compact 集合 D の上で C^1 級であるから、

$$\exists L \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall x, y \in D \quad \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le L\|x - y\|$$

が成り立つ[3]。やはり compact 集合上で連続であることから、

$$\exists C \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall u \in D \quad |\det \varphi'(u)| \le C,$$

$$\exists M \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in \Omega \quad |f(x)| \le M.$$

$D' := D \setminus N$ は有界 Jordan 可測集合であるから、$\forall\varepsilon > 0$ に対して、ある区間塊 K が存在して

$$K \subset D', \quad \mu(D' \setminus K) = \mu(D \setminus K) < \frac{\varepsilon}{4} \min\left\{\frac{1}{CM}, \frac{1}{(\sqrt{n}L)^n M}\right\}.$$

K は D を含むある n 次元立方体区間 I の各辺を ℓ 等分して得られる分割 Δ に属する小閉方体 W_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$ の合併としてよい。

$$\mu(W_j \cap W_k) = 0 \quad (j \ne k), \quad \bigcup_{j=1}^{m} W_j = K, \quad \mu(K) = \sum_{j=1}^{m} \mu(W_j).$$

W_j の中心を u_j, $\varphi(u_j) = x_j$ とする。必要ならば ℓ を大きくして $|\Delta|$ を十分小さくすれば

$$|\mu(\varphi(W_j)) - |\det \varphi'(u_j)|\, \mu(W_j)| \le \frac{\varepsilon}{6M(\mu(D) + 1)} \mu(W_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

関数 $u \mapsto f(\varphi(u))\, |\det \varphi'(u)|$ は compact 集合 D 上の連続関数であるから、実は一様連続であり、やはり ℓ を十分大きくすると

$$|f(\varphi(u))\, |\det \varphi'(u)|| - |f(\varphi(u_j))\, |\det \varphi'(u_j)|| \le \frac{\varepsilon}{6(\mu(\Omega) + 1)} \quad (u \in W_j,\ 1 \le j \le m).$$

同様に、ℓ を十分大きくすると

$$|f(x) - f(x_j)| \le \frac{\varepsilon}{6(\mu(\Omega) + 1)} \quad (x \in g(W_j),\ 1 \le j \le m).$$

[3] 実はそれほど明らかではない。杉浦 [13] ではきちんと証明されている。

$$
\begin{aligned}
\int_D f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_\Omega f(x)\,dx &= \left(\int_K f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_{\varphi(K)} f(x)\,dx\right) \\
&\quad + \int_{D\setminus K} f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_{\Omega\setminus K} f(x)\,dx \\
&=: P + Q + R.
\end{aligned}
$$

以下 P, Q, R を評価する。まず Q については、

$$
|Q| \le \int_{D\setminus K} |f(\varphi(u))|\,|\det\varphi'(u)|\,du \le MC\mu(D\setminus K) \le \frac{\varepsilon}{4}.
$$

一方

$$
\Omega\setminus\varphi(K) = \varphi(D)\setminus\varphi(K) \subset \varphi(D\setminus K)
$$

であるから、

$$
\mu(\Omega\setminus\varphi(K)) \le \mu(\varphi(D\setminus K)) \le \left(\sqrt{n}L\right)^n \mu(D\setminus K) \le \frac{\varepsilon}{4M}.
$$

ゆえに

$$
|R| \le \int_{\Omega\setminus\varphi(K)} |f(x)|\,dx \le M\mu(\Omega\setminus\varphi(K)) \le \frac{\varepsilon}{4}.
$$

仮定 (iii) より φ は D' で 1 対 1 であり、$D' \supset K$ だから φ は K でも 1 対 1 となる。ゆえに

$$
\varphi(W_j)\cap\varphi(W_k) = \varphi(W_j\cap W_k).
$$

ゆえに

$$
0 \le \mu(\varphi(W_j)\cap\varphi(W_k)) = \mu(\varphi(W_j\cap W_k)) \le \left(\sqrt{n}L\right)^n \mu(W_j\cap W_k) = 0 \quad (j\ne k).
$$

そこで

$$
P_j := \int_{W_j} f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_{\varphi(W_j)} f(x)\,dx \quad (j = 1, 2, \cdots, m)
$$

とおくと

$$
P = \sum_{j=1}^m P_j, \quad \mu(\varphi(K)) = \sum_{j=1}^m \mu(\varphi(W_j)).
$$

であるが、

$$
\begin{aligned}
P_j &= \int_{W_j} f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)|\,du - \int_{\varphi(W_j)} f(x)\,dx \\
&= \int_{W_j} f(\varphi(u))\,|\det\varphi'(u)| - f(x_j)\,|\det\varphi'(u_j)|\,du + \int_{\varphi(W_j)} (f(x_j) - f(x))dx \\
&\quad + f(x_j)\,(|\det\varphi'(u_j)|\,\mu(W_j) - \mu(\varphi(W_j)))
\end{aligned}
$$

と分解できるので

$$
|P_j| \le \frac{\varepsilon\mu(W_j)}{6(\mu(D)+1)} + \frac{\varepsilon\mu(\varphi(W_j))}{6(\mu(\Omega)+1)} + \frac{\varepsilon\mu(W_j)}{6(\mu(D)+1)}.
$$

$j = 1, 2, \cdots, m$ について和を取って、

$$\begin{aligned}|P| &\le \sum_{j=1}^{m} |P_j| \\ &\le \frac{\varepsilon}{6(\mu(D)+1)} \cdot \mu(K) + \frac{\varepsilon}{6(\mu(\Omega)+1)} \cdot \mu(\varphi(K)) + \frac{\varepsilon}{6(\mu(D)+1)} \cdot \mu(K) \\ &\le \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

まとめると

$$\left| \int_D f(\varphi(u)) \left|\det \varphi'(u)\right| du - \int_\Omega f(x)\, dx \right| \le |P| + |Q| + |R| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから

$$\int_D f(\varphi(u)) \left|\det \varphi'(u)\right| du = \int_\Omega f(x)\, dx. \blacksquare$$

D.2　n 次元極座標とそのヤコビアン

ここに書いてあることは、解析概論 I の講義ノート (https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/kaisekigairon-1/pdf/textbook1-2002-full.pdf) から抜き出した。

$\mathbf{R}^n$ の点 $(x_1, \cdots, x_n)$ の (n 次元) **極座標**とは、次式で定義される $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$ のことをいう。

$$\text{(D.5)}\qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \quad\cdots \\ x_i = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{i-1}\cos\theta_i \qquad (2 \le i \le n-1) \\ \quad\cdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

ただし $(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})$ は次の条件式で表される $\mathbf{R}^n$ の部分集合 D の上を動くとする:

$$\text{(D.6)}\qquad r \ge 0, \quad \theta_i \in [0, \pi] \quad (i = 1, 2, \cdots, n-2), \quad \theta_{n-1} \in [0, 2\pi].$$

注意 D.2.1 $n = 3$ のとき、既に紹介した空間極座標

$$\text{(D.7)}\qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \qquad (r \ge 0,\ \theta \in [0, \pi],\ \phi \in [0, 2\pi]) \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

とは一致しないが、座標の順番が異なるだけで本質的には同じと考えられる。

定理 D.2.2 (n 次元極座標のヤコビアン) n を 2 以上の自然数とするとき、写像 $\varphi_n\colon D \ni (r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) \mapsto (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ を (D.5), (D.6) で定めるとき、

$$\det \varphi_n'(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin^2\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}.$$

この証明を与えるかわりに、そのヒントとなる問題を掲げておく。

問題 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ に対して、次の式を満たす $\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ を 4 次元極座標と呼ぶ:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta_1 \\ y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ z &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ w &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \in I := [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,2\pi].$$

(1) $\begin{cases} X &= r\cos\theta_1 \\ Y &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ u &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ v &= \theta_3 \end{cases}$ とすると、写像 $\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix}$ のヤコビアンは $r^2\sin\theta_1$ であることを示せ。

(2) $\begin{cases} x &= X \\ y &= Y \\ z &= u\cos v \\ w &= u\sin v \end{cases}$ とするとき、写像 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンを求め、$\begin{pmatrix} r \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ のヤコビアンが $r^3\sin^2\theta_1\sin\theta_2$ であることを示せ。

(3) 4 次元単位球 $\{(x,y,z,w); x^2+y^2+z^2+w^2 \leq 1\}$ の 4 次元 Jordan 測度を求めよ。

付 録E　広義積分についての補足

E.1　広義積分練習帳

前回簡単な場合 (被積分関数 f の符号が一定の場合) に広義積分の計算法を説明したが、「わかりづらい」と感じる人が多いようなので補足する。

「次の広義積分 $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ を求めよ」と要求されたら、以下の手順で考える。

(1) 積分範囲 Ω がどういうものか理解する。図を描くことを強く勧める[1]。

(2) Ω は有界であるか、そうでないか (無限に広がっているか) 判別する。

(3) 被積分関数 f は Ω 全体で定義されているか (分数だったら分母が 0 にならないか、対数関数で真数が 0 になったりしないか)？ f の値が有界であるか (その点に近づくと値が発散するようなものはないか)？

(4) Ω や f は極座標向きか？広義積分でない普通の積分の場合は、極座標向きかそうでないかの区別は簡単だが (ほぼ Ω の形が丸いかどうかで判断できる)、広義積分の場合はやや微妙である。例えば全平面 $\mathbf{R}^2$ は、増大する正方形 $K_n=[-n,n]\times[-n,n]$ で近似するのが良い場合もあれば、増大する円盤 $K_n=\{(x,y);x^2+y^2\le n^2\}$ で近似するのが良い場合もある。

(5) 以上をふまえて Ω を近似する集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を作る。これができるようになるには絶対に練習が必要である (他人の解答を見るだけでは、まずできるようにならない)。

(6) もし f の符号が一定ならば、

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

をていねいに計算する (だけ)。f の符号が一定でない場合は、それを実行する前に絶対収束であるかどうか、つまり

$$\iint_\Omega |f(x,y)|\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} |f(x,y)|\,dx\,dy<\infty$$

であるかどうかをチェックする必要がある (これについては後述)。

---

[1]「図が描けない」という人もいると思う。その場合「図が分からないから、とりあえず式を書いてみる」と考える人もいるようだが、ここが大事なところで、Ω が何か分からずに後のことを考えられるはずは**決してない**と考えるべきである。十二分に分かるから省略するのはありえるが、分からないのにむやみに突進してもうまく行くはずがない。

例 E.1.1

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{x^2(1+y^2)}\,dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); x \ge 1,\ y \ge 1\}.$$

まず Ω の図を描いてそれが有界でないことを理解しよう。被積分関数は分数関数であるが、Ω ではその分母は 0 にならない。この Ω, f が極座標向きかそうでないかは、極座標変換した場合とそうでない場合でどちらが簡単そうか予想することになる。この場合は極座標にしても簡単にならず、そのまま素直に Fubini の定理の形に持ち込むのがよさそうである[2]。そこで

$$K_n := \{(x,y); 1 \le x \le n,\ 1 \le y \le n\}$$

とおく (K_n の図も描いた方がよい)。$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ であることは見やすい。被積分関数は Ω で正の値を取るので、後はひたすら計算である。

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \frac{1}{x^2(1+y^2)}\,dx\,dy &= \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{1}{x^2(1+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-2}\,dx \cdot \int_1^n \frac{1}{1+y^2}\,dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^n \cdot \left[\tan^{-1} y\right]_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\tan^{-1} n - \tan^{-1} 1\right) = 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}. \blacksquare
\end{aligned}$$

例 E.1.2

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \ge 1\}.$$

これまた Ω の図を描いてそれが有界でないことを理解しよう。被積分関数は分数関数であるが、Ω ではその分母は 0 にならない。この Ω, f は明らかに極座標向きである (境界は丸いし、被積分関数も r だけの関数なので簡単)。そこで

$$K_n := \{(x,y); 1 \le x^2+y^2 \le n^2\}$$

とおく。$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ である。被積分関数は Ω で正の値を取るので、後はひたすら計算である (計算ははしょって書くが、ヤコビアンは忘れずに…)。

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy &= \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_1^n \frac{1}{(r^2)^2} \cdot r\,dr\right) d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\pi \int_1^n r^{-3}\,dr = 2\pi \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2} r^{-2}\right]_1^n = \pi. \blacksquare
\end{aligned}$$

例 E.1.3

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1\}.$$

上の例と似ているが、Ω の中の条件の不等式の向きが逆だから、計算のやり方はまったく違う。まず Ω は有界である。被積分関数は分数関数で、Ω はその分母を 0 とする点 (ここでは原点) を含んでいることに注意する。この Ω, f はやはり極座標向きである (境界は丸いし、被積分関数も r だけの関数…)。そこで原点という「特異点」をさけて

$$K_n := \{(x,y); \frac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le 1\}$$

[2] どういうことか分かりたければ、実際に両方ともやってみるとよい。

とおく (この K_n は良く出て来るので、人によっては紙の上に図を描かなくても頭の中に描けるだろうが、まだ一度も描いたことがない人は是非とも描くこと)。なお穴を原点中心半径 $1/n$ の円盤としたのは極座標との相性を考えたものである (例えば穴を四角くすると極座標に変換した後に曲がってしまって困る)。$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ では**ない**。正しくは $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \setminus \{\text{原点}\}$ であるが、これはこれで構わない。被積分関数は Ω で正の値を取るので、後はひたすら計算。

$$\iint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^1 \frac{1}{r^2}\cdot r\,dr \right) d\theta$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \int_{1/n}^1 \frac{dr}{r} = 2\pi \lim_{n\to\infty} [\log r]_{1/n}^1 = 2\pi \lim_{n\to\infty} \log n = \infty. \blacksquare$$

例 E.1.4

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy, \quad \Omega = \{(x,y); 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}.$$

これは Ω の図を描かないと始まらない (この Ω も頻出するものなので、人によっては頭の中に描けると思うが、ミスを避けるためにも、また後の K_n をどうするか考えるためにも、紙の上に実際に図を描くことを強く勧める)。Ω が縦線集合あるいは「横線集合」であるということに気づいて、$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x \text{某}\,dy \right) dx$, $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 \text{某}\,dx \right) dy$ という変形が自然と頭に浮かぶようになっていなくてはならない (そうでなかったら、広義積分という前に Fubini の定理の練習が必要)。Ω は三角形だから、もちろん有界である。被積分関数は分数関数で、Ω はその分母を 0 とする点 (ここでは x 軸上の点 $(x,0)$ $(x \in [0,1])$ — それ全体を B とおく) を含んでいることに注意する。この Ω, f は明らかに極座標向きではない。B の点という「特異点」をどう避けるかが問題であるが、「横線集合」上の Fubini の定理を使うことを念頭に

$$K_n := \{(x,y); \frac{1}{n} \le y \le 1,\ y \le x \le 1\}$$

とおく。この K_n の図をじっくり眺めて、確かに B に属する点という特異点を避けることが出来ていることに注意しよう。$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ ではなく、$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega \setminus B$ である (慣れないと分かりづらくて当然の結果なので、あせらずゆっくり考えること)。被積分関数は Ω で正の値を取るので、後はひたすら計算。

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 \left(\int_y^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} dx \right) dy$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \left[2x^{1/2} \right]_y^1 dy = 2 \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 \left(y^{-1/2} - y \right) dy$$
$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = 2. \blacksquare$$

E.2 オイラーのガンマ関数とベータ関数

広義積分は応用上実に様々なものが現れるが、かなり多くのものが以下に導入する二つの関数「ガンマ関数 Γ」、「ベータ関数 B」 (それ自身広義積分で定義される) を用いて表現可能である。そこで、この二つの関数の性質を詳しく調べておくと便利である[3]。

[3] ここで、ガンマ関数、ベータ関数を取り上げるのは、以前教科書として使ったことのある中尾 [19] に習ったものである。忙しい講義で時間を取って解説することは難しいが、とかく忘れられがちなこの種の関数の紹介をすることは大事であると考える。

(ガンマ関数、ベータ関数とも 1 変数の広義積分ではあるが、後で紹介する**ガンマ関数の積公式** (命題 E.2.4 の (5)) の証明は、ここで紹介するような重積分を利用するのが普通である。)

補題 E.2.1 (ガンマ関数の定義のための準備)

$$I = \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \quad (s \in \mathbf{R}), \tag{E.1}$$

$$J = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\, dx \quad (s > 0) \tag{E.2}$$

はともに絶対収束する広義積分である。

証明　まず I から考える。

$$e^{-x} x^{s-1} \le \frac{M}{x^2} \quad (x \in [1, \infty))$$

となる $M \in \mathbf{R}$ が存在することを示せばよいが、これは

$$[1, \infty) \ni x \longmapsto e^{-x} x^{s+1}$$

が上に有界であることと同値で、これを確かめるのは簡単である。次に J について考えると、まず、

$$e^{-x} x^{s-1} \le x^{s-1} \quad (x \in (0, 1])$$

である。$s - 1 > -1$ に注意すると、 x^{s-1} は $(0, 1]$ で広義積分可能であるから、 J は絶対収束である。 ■

補題 E.2.2 (ベータ関数の定義のための準備) $p > 0$, $q > 0$ に対して次式で定義される広義積分は絶対収束する。

$$I = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1 - x)^{q-1}\, dx, \tag{E.3}$$

$$J = \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1}\, dx. \tag{E.4}$$

証明　まず

$$x^{p-1} (1 - x)^{q-1} \le x^{p-1} \quad (x \in (0, 1/2]),$$

$$\int_0^{1/2} x^{p-1}\, dx < \infty \quad (\because p - 1 > -1)$$

であるから I は絶対収束する。次に

$$x^{p-1} (1 - x)^{q-1} \le (1 - x)^{q-1} \quad (x \in [1/2, 1))$$

であり、$t = 1 - x$ と変数変換することにより

$$\int_{1/2}^1 (1 - x)^{q-1}\, dx = \int_0^{1/2} t^{q-1}\, dt < \infty \quad (\because q - 1 > -1)$$

であるから J も絶対収束する。 ■

定義 E.2.3 (ガンマ関数, ベータ関数) (1) $\Gamma\colon (0,\infty)\to\mathbf{R}$ を

(E.5) $$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \quad (s>0)$$

により定義し、**ガンマ関数**と呼ぶ (Euler, 1781)。

(2) $B\colon (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbf{R}$ を

(E.6) $$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p,q>0)$$

により定義し、**ベータ関数**と呼ぶ。

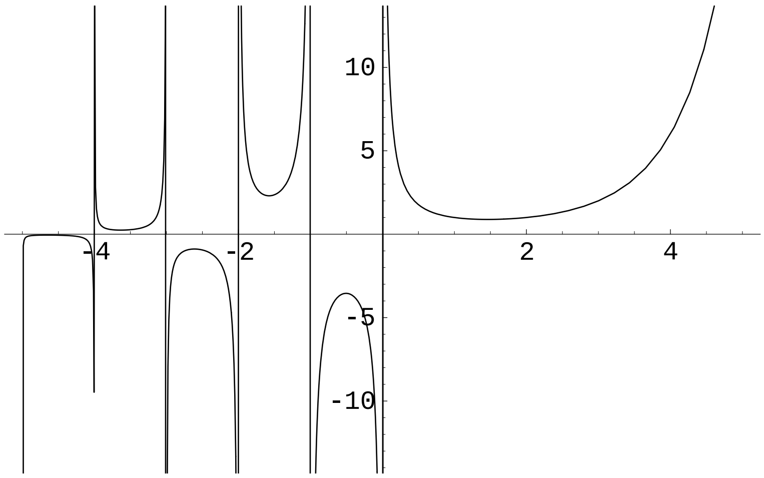


図 E.1: ガンマ関数のグラフ

命題 E.2.4 (ガンマ関数, ベータ関数の性質) ガンマ関数 Γ, ベータ関数 B について、以下の (1)–(5) が成り立つ。

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s>0)$.

(2) $\Gamma(1) = 1$.

(3) $\Gamma(1/2) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

(4) $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}\theta\,d\theta \quad (p,q>0)$.

(5) (**ガンマ関数の積公式**) $\quad B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p,q>0)$.

証明 (1) は部分積分による。(2) は被積分関数が e^{-x} なので簡単である。(3) は $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx =$

$\sqrt{\pi}/2$ に帰着される。(4) は $x = \sin^2\theta$ ($\theta \in [0, \pi/2]$) と置換すると、

$$1 - x = \cos^2\theta, \quad dx = 2\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta$$

となることによる。(5) については、$E = \{(x,y); x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とおくと、

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx \int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}\,dy = \int_E e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy.$$

ここで

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{x}{x+y} \end{cases}$$

と変数変換する。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -u$$

であり、 E に対応するのは

$$D = \{(u,v); u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 1\}$$

である。それゆえ

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \iint_D e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dudv \\
&= \int_0^\infty e^{-u}u^{p+q-1}\,du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv \\
&= \Gamma(p+q)B(p,q). \blacksquare
\end{aligned}$$

注意 E.2.5 (1) これから例えば

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbf{N})$$

である。すなわちガンマ関数は階乗を一般化したものである。同様に $\Gamma(n+1/2)$ の値も簡単に計算できることが分かる。実際、

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

(2) 一方、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

である。

(3) ガンマ関数は、複素変数まで拡張して考えるのが普通である。 ■

例 E.2.6 (n 次元球の測度) $a \in \mathbf{R}^n$, $R > 0$ とするとき、a を中心とする半径 R の (超) 球 $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| \leq R\}$ の n 次元 Jordan 測度 $\mu(\Omega)$ を求めよう。定義より

$$\mu(\Omega) = \int_\Omega dx$$

であるが、容易に $a=0$ として良いことが分かる。n 次元極座標変換は

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1 \\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
&\ \vdots \\
x_i &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{i-1}\cos\theta_i \quad (2\le i\le n-1) \\
&\ \vdots \\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},
\end{aligned}
$$

で与えられる (付録 D.2 を参照せよ)。ただし

$$
r\ge 0,\quad \theta_i\in[0,\pi]\quad (1\le i\le n-2),\quad \theta_{n-1}\in[0,2\pi]
$$

であり、ヤコビアンは

$$
\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})} = r^{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\sin^{n-i-1}\theta_i
$$

である。Ω に対応するのは、

$$
D := \{(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-2},\theta_{n-1}); 0\le r\le R,\ \theta_i\in[0,\pi]\quad (1\le i\le n-2),\quad \theta_{n-1}\in[0,2\pi]\}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= \int\cdots\iint_D \left(r^{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\sin^{n-i-1}\theta_i\right) dr d\theta_1\cdots d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^R r^{n-1}dr\prod_{i=1}^{n-2}\int_0^\pi \sin^{n-i-1}\theta_i\,d\theta_i\int_0^{2\pi}d\theta_{n-1} \\
&= \frac{2\pi R^n}{n}\prod_{i=1}^{n-2}\int_0^\pi \sin^{n-i-1}\theta_i\,d\theta_i.
\end{aligned}
$$

命題 E.2.4 から導かれる

$$
\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}
$$

から

$$
\int_0^\pi \sin^\ell\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\ell+2}{2}\right)}
$$

となるので、

$$
\prod_{i=1}^{n-2}\int_0^\pi \sin^{n-i-1}\theta_i\,d\theta_i = \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\Gamma(1)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}.
$$

ゆえに

$$\mu(\Omega)=\frac{2\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}=\frac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}=\begin{cases}\dfrac{\pi^k R^{2k}}{k!} & (n=2k,\ k\in\mathbf{N}\text{ のとき})\\ \dfrac{2^k\pi^{k-1}R^{2k-1}}{(2k-1)!!} & (n=2k-1,\ k\in\mathbf{N}\text{ のとき}).\end{cases}$$

$n=1$ のとき $\mu(\Omega)=2R$, $n=2$ のとき $\mu(\Omega)=\pi R^2$, $n=3$ のとき $\mu(\Omega)=4\pi R^3/3$ となることが確認できる。■

余談 E.2.1 (ガンマ関数を使わずに…) n 次元球の測度の計算には、上の例のようにガンマ関数を使うとシンプルに書けるが、絶対必要というわけでなく、以下のように素朴に計算を進めてもできる。

計算に入る前に、飛び階乗 $n!!$ という記法の紹介をしておく。

$$n!!:=\begin{cases}2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n-2)\cdot n & (n\text{ が偶数のとき})\\ 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-2)\cdot n & (n\text{ が奇数のとき}).\end{cases}$$

$n=2k$ (k は自然数) の場合は $n!!=(2k)!!=2^{n/2}k!$ が成り立つ。

$V_n:=\{x\in\mathbf{R}^n;|x|\le R\}$ の測度 とおく。$n\ge 2$ のとき極座標を使えば

$$V_n=\int_0^R r^{n-1}\,dr\cdot\prod_{j=1}^{n-2}\int_0^\pi\sin^j\theta\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi R^n}{n}\cdot 2^{n-2}\prod_{j=1}^{n-2}\int_0^{\pi/2}\sin^j\theta\,d\theta.$$

そこで $n\ge 0$ に対して $I_n:=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta$ とおくと

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n\ge 2),\quad I_0=\frac{\pi}{2},\quad I_1=1.$$

実は $I_{n-1}I_n=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{n}$ が成り立つ[4]。さて

$$F_n:=\begin{cases}1 & (n=2),\\ I_1I_2\cdots I_{n-2} & (n\ge 3)\end{cases}$$

とおくと、

$$F_{n+2}=F_n\cdot I_{n-1}I_n=F_n\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n},\quad F_2=1,\quad F_3=1$$

[4] これを証明するには、

$$I_{2n-1}=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},\quad I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

を得てから[5] $I_{2n-1}I_{2n}=\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $I_{2n-2}I_{2n-1}=\dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ を確かめてもよいし、$J_n:=I_nI_{n-1}$ とおくとき、

$$J_n=I_nI_{n-2}=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-1}I_{n-3}=\frac{n-2}{n}J_{n-2}\quad\text{すなわち}\quad nJ_n=(n-2)J_{n-2}$$

が成り立ち、

$$J_1=I_0I_1=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}J_2=I_1I_2=1\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

が成り立つことから $nJ_n=\dfrac{\pi}{2}$ を導いてもよい。

が成り立つことから、

$$\begin{cases} F_{2k} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{k-1} \cdot \dfrac{1}{(2k-2)!!} = \left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{k-1} \dfrac{1}{(k-1)!}, \\ F_{2k+1} = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{k-1} \cdot \dfrac{1}{(2k-1)!!}. \end{cases}$$

$V_n = \dfrac{2^{n-1}\pi R^n}{n} \cdot F_n$ であるから

$$\begin{aligned} V_{2k} &= \frac{2^{2k-1}\pi R^{2k}}{2k} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} = \frac{\pi^k R^{2k}}{k!}, \\ V_{2k+1} &= \frac{2^{2k}\pi R^{2k+1}}{2k+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!} = \frac{\pi^k R^{2k+1} 2^{k+1}}{(2k+1)!!}. \end{aligned}$$

$V_{n+2} = \dfrac{2\pi R^2}{n+2} V_n$ という漸化式が成り立つが、これを手短かに導出することはできないだろうか？ ■

付 録F　がらくた箱

F.1　閉区間上の連続関数の積分可能性の証明

この文書の本文では、上積分、下積分を使って積分を定義、Riemann 和による定義との同値性を Darboux の定理を用いて行っている。ここでは、Riemann 和で定義した場合の、「短い」証明を与える。

1.　任意の正数 ε に対して、十分小さな正数 δ をとると、$I=[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $\Delta'=\{x'_i\}_{i=0}^{n'}$ に対して、

$$|\Delta|<\delta,\ |\Delta'|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |S_{\Delta,\xi}-S_{\Delta',\xi'}|<\varepsilon \tag{F.1}$$

が成り立つことを示す。ここに $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$, $\xi'=\{\xi'_i\}_{i=1}^{n'}$ は各 i に対して $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\xi'_i\in[x'_{i-1},x'_i]$ となる任意の点集合である。

連続関数 $f\colon I\to\mathbf{R}$ は I 上で一様連続であるから、与えられた正数 ε に対して、正数 δ を

$$x,y\in I,\quad |x-y|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

となるように取れる。

$|\Delta|,|\Delta'|<\delta$ としよう。Δ と Δ' の分点をあわせて作った分割を $\widetilde{\Delta}=\{\widetilde{x}_i\}_{i=0}^{\widetilde{n}}$, また $\widetilde{\xi}=\{\widetilde{\xi}_i\}_{\widetilde{n}}$ を適当に (例えば $\widetilde{\xi}_i=(\widetilde{x}_{i-1}+\widetilde{x}_i)/2$) と定めるとき、$\left|S_{\Delta,\xi}-S_{\widetilde{\Delta},\widetilde{\xi}}\right|<\varepsilon/2$, $\left|S_{\Delta',\xi'}-S_{\widetilde{\Delta},\widetilde{\xi}}\right|<\varepsilon/2$ を示せばよい。どちらでも同様なので前者を示す。Δ の一つの区間 $A=[x_{i-1},x_i]$ は、$\widetilde{\Delta}$ では ℓ 個の区間 $[\widetilde{x}_{k+j-1},\widetilde{x}_{k+j}]$ $(j=1,2,\cdots,\ell)$ に分割される ($\ell=1$ もありうる)。$\sum_{j=1}^{\ell}(\widetilde{x}_{k+j}-\widetilde{x}_{k+j-1})=x_i-x_{i-1}$ に注意すると

$$\left|f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{j=1}^{\ell}f(\widetilde{\xi}_{k+j})(\widetilde{x}_{k+j}-\widetilde{x}_{k+j-1})\right|\le\sum_{j=1}^{\ell}\left|f(\xi_i)-f(\widetilde{\xi}_{k+j})\right|(\widetilde{x}_{k+j}-\widetilde{x}_{k+j-1})$$

であるが、ξ_i も $\widetilde{\xi}_{k+j}$ も $[x_{i-1},x_i]$ に含まれるので差は δ 未満であり、$\left|f(\xi_i)-f(\widetilde{\xi}_{k+j})\right|<\varepsilon/(2(b-a))$. ゆえに

$$\begin{aligned}\left|f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{j=1}^{\ell}f(\widetilde{\xi}_{k+j})(\widetilde{x}_{k+j}-\widetilde{x}_{k+j-1})\right|&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{j=1}^{\ell}(\widetilde{x}_{k+j}-\widetilde{x}_{k+j-1})\\&=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i-x_{i-1}).\end{aligned}$$

これを $i=1,\cdots,n$ について加えると

$$|S_{\Delta,\xi}-S_{\widetilde{\Delta},\widetilde{\xi}}|<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

2.　自然数 n に対して $\Delta^{(n)}$ を区間の n 等分分割とし、$\xi^{(n)} = \{\xi^{(n)}\}_{i=1}^n$ を各小区間の中点を取ったものと定義する。

任意に与えられた正数 ε に対して、δ を (F.1) を満たすようにとる。すると $n, m > (b-a)/\delta$ なる任意の n, m に対して $\left|\Delta^{(n)}\right|, \left|\Delta^{(m)}\right| < \delta$ となるので、

$$\left|S_{\Delta^{(n)},\xi^{(n)}} - S_{\Delta^{(m)},\xi^{(m)}}\right| < \varepsilon \tag{F.2}$$

が成り立つ。$\{S_{\Delta^{(n)},\xi^{(n)}}\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列になるので、収束する。すなわち、ある S が存在して

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{\Delta^{(n)},\xi^{(n)}}.$$

(F.2) で $m \to \infty$ として

$$\left|S_{\Delta^{(n)},\xi^{(n)}} - S\right| \le \varepsilon. \tag{F.3}$$

3.　任意に与えられた正数 ε に対して、正数 δ を (F.1) を満たすようにとる。$n > (b-a)/\delta$ をみたす $n \in \mathbf{N}$ を一つ取る ((F.3) が成り立つ)。$I = [a, b]$ の任意の分割 $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$ と、$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ をみたす任意の点集合 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ に対して、

$$|S_{\Delta,\xi} - S| \le \left|S_{\Delta,\xi} - S_{\Delta^{(n)},\xi^{(n)}}\right| + \left|S_{\Delta^{(n)},\xi^{(n)}} - S\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

これは

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S_{\Delta,\xi} = S$$

を示している。

F.2　Darboux の定理の別証

補題 1.1.29 として紹介して、そこで良くある証明を紹介しておいたが、それは少し気に入らないという人がいたので、以下自力で考え直した証明を述べる。

$M = \sup_A f$, $\mu = \inf_A f$ とおく。$M = \mu$ のとき主張は明らかだから、以下 $M > \mu$ とする。$U(f, A)$ の定義から、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある分割 $\Delta_\varepsilon = \{z_1, \cdots, z_\ell\}$ が存在して、

$$U(f, A, \Delta_\varepsilon) \le U(f, A) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{F.4}$$

以下

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\ell(M-\mu)}$$

とおくとき、$|\Delta| \le \delta$ を満たす任意の A の分割 Δ に対して、

$$U(f, A) \le U(f, A, \Delta) \le U(f, A) + \varepsilon$$

が成り立つことを示す。

Δ の分点を $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ とおき、Δ と Δ_ε の分点を合せて作った A の分割を Δ' とする。

Δ に属する各小区間 $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ の内部に Δ_ε の分点が存在するかどうかで場合分けする。

(i) I_j の内部 I_j° に Δ_ε の分点が存在しない。
このとき I_j は Δ' に属する小区間でもある。ゆえに I_j からの $U(f,A,\Delta)$, $U(f,A,\Delta')$ の、寄与は等しい。

(ii) I_j の内部 I_j° に Δ_ε の分点が存在する。
それらすべてを $z_k < \cdots < z_m$ とする。このとき I_j は Δ' では

$$[x_{j-1}, z_k], [z_{k+1}, z_{k+2}], \cdots, [z_{m-1}, z_m], [z_m, x_j]$$

という小区間に分割される。$U(f,A,\Delta')$ でこれら小区間に対応する部分は、

$$A_j := \sup_{x\in[x_{j-1},z_k]} f(x)(z_k - x_{j-1}) + \sum_{i=1}^{m-k-1} \sup_{x\in[z_{k+i},z_{k+i+1}]} f(x)(z_{k+i+1} - z_{k+i}) + \sup_{x\in[x_{j-1},z_m]} f(x)(x_j - z_m).$$

もちろん $f \geq \mu$ であるから、

$$A_j \geq \mu \left[(z_k - x_{j-1}) + \sum_{i=1}^{m-k-1} (z_{k+i+1} - z_{k+i}) + (x_j - z_m) \right] = \mu(x_j - x_{j-1}).$$

一方、$U(f,A,\Delta)$ で I_j に対応する部分は

$$B_j = \sup_{x\in I_j} f(x)(x_j - x_{j-1}) \leq M(x_j - x_{j-1}).$$

これから

$$B_j - A_j \leq (M-\mu)(x_j - x_{j-1}) \leq (M-\mu)|\Delta|.$$

ゆえに

$$U(f,A,\Delta) - U(f,A,\Delta') = \sum_{I_j^\circ \cap \Delta_\varepsilon \neq \emptyset} (B_j - A_j) \leq (M-\mu)|\Delta| \sum_{I_j^\circ \cap \Delta_\varepsilon \neq \emptyset} 1 \leq \ell(M-\mu)|\Delta|.$$

ゆえに $|\Delta| \leq \delta$ ならば

$$U(f,A,\Delta) \leq U(f,A,\Delta') + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{F.5}$$

ところで Δ' は Δ_ε の細分であるから

$$U(f,A,\Delta') \leq U(f,A,\Delta_\varepsilon). \tag{F.6}$$

(F.4), (F.5), (F.6) から

$$U(f,A,\Delta) \leq U(f,A,\Delta') + \frac{\varepsilon}{2} \leq U(f,A,\Delta_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \leq U(f,A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = U(f,A) + \varepsilon.$$

一方で $U(f,A)$ の定義から

$$U(f,A) \leq U(f,A,\Delta)$$

であるから、まとめて

$$U(f,A) \leq U(f,A,\Delta) \leq U(f,A) + \varepsilon. \blacksquare$$

F.3　面積座標の積分公式

(変数変換の例が極座標に片寄っているので、有限要素法でよく使われる面積座標の積分公式を紹介しよう、と思ったのだが…)

平面上の三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ が与えられたとき、1 次関数 ϕ_i $(i=1,2,3)$ で、

$$\phi_i(\mathrm{P}_j)=\delta_{ij}\quad (i,j=1,2,3)$$

を満たすものが一意に定まる。

$\mathbf{R}^2$ 上の実数値 1 次関数全体の集合は、通常の和とスカラー積に関して $\mathbf{R}$ 上の線型空間となり、その次元は 3 であるが、上の ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 はその基底となる[1]。

以下

$$I_{\ell mn}:=\int_{\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}\phi_1(x)^\ell\phi_2(x)^m\phi_3(x)^n dx\quad (\ell,\,m,\,n=0,1,\cdots)$$

を求めることを問題とする。

$\mathrm{P}_i=(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ とおき、変数変換 φ: $\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ を

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}$$

で定義する。$\widetilde{\mathrm{P}}_1:=(0,0)$, $\widetilde{\mathrm{P}}_2:=(1,0)$, $\widetilde{\mathrm{P}}_3:=(0,1)$ の φ による像はそれぞれ P_1, P_2, P_3 であるから、$\Delta:=\{(u,v);u\ge 0,\ v\ge 0,\ u+v\le 1\}$ とおくと、$\varphi(\Delta)=\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ となる。さらに

$$\det\varphi'(u,v)\equiv\det A=(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)=2\times\left(\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 \text{ の面積}\right).$$

さて、$(\phi_i\circ\varphi)(u,v)$ $(i=1,2,3)$ はいずれも 1 次関数で、

$$(\phi_i\circ\varphi)(\widetilde{\mathrm{P}}_j)=\delta_{ij}$$

であるから、

$$(\phi_1\circ\varphi)(u,v)=1-u-v,\quad (\phi_2\circ\varphi)(u,v)=u,\quad (\phi_3\circ\varphi)(u,v)=v$$

である。ゆえに

$$I_{\ell mn}:=\iint_\Delta(1-u-v)^\ell u^m v^n\cdot|\det A|\,dudv=|\det A|\int_0^1 u^m\left(\int_0^{1-u}(1-u-v)^\ell v^n dv\right)du$$

内側の積分を計算するため、$u\ne 1$ とするとき、$v=(1-u)V$ とおくと、$dv=(1-u)dV$ であり、

$$\begin{aligned}\int_0^{1-u}(1-u-v)^\ell v^n dv&=\int_0^1\left[(1-u)(1-V)\right]^\ell(1-u)^n V^n\cdot(1-u)dV\\&=(1-u)^{\ell+n+1}\int_0^1(1-V)^\ell V^n\,dV=(1-u)^{\ell+n+1}B(\ell+1,n+1).\end{aligned}$$

---

[1] P_i での値が f_i $(i=1,2,3)$ であるような 1 次関数 f は $f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^3 f_i\phi_i(x)$ で与えられる。

ただし $B(\cdot,\cdot)$ は Euler のベータ関数を表す。これから

$$\begin{aligned}
I_{\ell mn} &= |\det A|\, B(\ell+1, n+1) \int_0^1 (1-u)^{\ell+n+1} u^m\, du \\
&= |\det A|\, B(\ell+1, n+1) \cdot B(\ell+n+2, m+1) \\
&= |\det A|\, \frac{\Gamma(\ell+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\ell+n+2)} \cdot \frac{\Gamma(\ell+n+2)\Gamma(m+1)}{\Gamma(\ell+m+n+3)} = |\det A|\, \frac{\ell! m! n!}{(\ell+m+n+2)!}. \blacksquare
\end{aligned}$$

…どこかで見たような積分だと思っていたら、大学 1 年生の時に習った由緒正しい Dirichlet 積分だ。

$p_0 > 0,\ p_1 > 0,\ \ldots,\ p_n > 0,$

$$D_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1\}$$

とするとき、

$$\begin{aligned}
&\int \cdots \int_{D_n} (1-(x_1+x_2+\cdots+x_n))^{p_0-1} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \\
&\quad = \frac{\Gamma(p_0)\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_0+p_1+\cdots+p_n)}.
\end{aligned}$$

F.4 四面体の体積

四面体

$$T = \{\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c}; t \geq 0,\ s \geq 0,\ r \geq 0,\ t+s+r \leq 1\}$$

の体積は平行六面体

$$\{\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c}; t \in [0,1],\ s \in [0,1],\ r \in [0,1]\}$$

の 1/6 であることは簡単に分かる (「知っている」ことでもあるし、変数変換して計算してもよろしい)。

$$\mu_3(T) = \frac{1}{6} |\det A|, \quad A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}).$$

ところで四面体があるとき、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は分からず、分かっているのは各辺の長さだけということがある。このような場合に役立つ公式を導こう。一般に $\det A = \det A^T$ であることに注意すると

$$|\det A| = \sqrt{\det A^T \det A} = \sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{pmatrix}}.$$

ゆえに $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の内積が分かれば計算できる。

たとえば

$$\|\boldsymbol{a}\| =: a, \quad \|\boldsymbol{b}\| =: b, \quad \|\boldsymbol{c}\| =: c$$

とおくと、

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a^2, \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = b^2, \quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = c^2.$$

さらに

$$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| =: k, \quad \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\| =: \ell, \quad \|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\| =: m$$

とおくと、余弦定理から[2]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-k^2\right), \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\ell^2\right), \quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\left(c^2+a^2-m^2\right).$$

これから

$$A^TA = \begin{pmatrix} a^2 & \frac{1}{2}\left(a^2+b^2-k^2\right) & \frac{1}{2}\left(a^2+c^2-m^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(b^2+a^2-k^2\right) & b^2 & \frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\ell^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(c^2+a^2-m^2\right) & \frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\ell^2\right) & c^2 \end{pmatrix}.$$

(後から追加) この話は初めて知ったとき「見たことがない、面白い」と感じたので、ここに収録したののだが、Gram の行列式の良くある応用にすぎないことに後から気が付いた。この講義では、曲面積については、3 次元空間の中の普通の (つまり 2 次元の) 曲面しか扱っていないが、$n>3$ の場合の n 次元空間の中の一般の "曲面" の測度を扱うためには、Gram の行列式は普通に出て来る。)

F.5 行列式の計算

期末試験で 3 次以上の行列式の計算を出すのは落後者続出で危険か、(線形代数の試験ではないし) 出題しないことにするかとも考えるわけですが、数学科の学生でいる間は本当は出来なければいけない。

(i) 2 次の場合の公式 ($\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$), (ii) 列 (行) ベクトルに関して交代多重線形形式であること、(iii) 一つの列 (行) に関する展開, (iv) 上三角行列に対しては対角成分の積であること, (v) $\det(AB) = \det A \det B$ であり特に $\det(P^{-1}AP) = \det A$, (vi) 行列を転置しても行列式は変らない、くらいはすらすら出来て欲しい。

交代多重線形性

例えば、$\det(k_1a_1+k_2a_2,b,c) = k_1\det(a_1,b,c)+k_2\det(a_2,b,c)$ が成立することを、第 1 列について線形、というわけである。第 1 列だけでなく、何列目でも成立する (多重線形性, n 重線形性という次第)。「交代」というのは、任意の 2 列を入れ替えると符号が変るということで、例えば $\det(b,a,c) = -\det(a,b,c)$.

列 (行) に関する展開

ちゃんとした説明は教科書を見て下さい。3 次元極座標変換のヤコビアンでは、第 3 列または第 3 行で展開するのが良さそうなので、その場合だけ書いておきます。

[2]あるいは内積の性質から、例えば $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2\right)$.

第 3 列での展開というのは

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

第 3 行での展開というのは

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3 次元極座標変換のヤコビアンの計算＆誤植の訂正

本文中では、行列式を第 3 列で展開してあります。

$$\begin{aligned}\det\varphi' &= \cos\theta\begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} + (-1)(-r\sin\theta)\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} \\ &= \cos\theta\cdot r\cos\theta\cdot r\sin\theta\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} + (-1)(-r\sin\theta)\cdot\sin\theta\cdot r\sin\theta\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta.\end{aligned}$$

二つ目の等号では、行列式の多重線形性のうち、スカラーがくくり出せること ($\det(ka,b) = k\det(a,b)$, $\det(a,\ell b) = \ell\det(a,b)$) を用いていることに注意。

ある年度の講義では第 3 列で展開しました。こちらも参考までに書いておきます。

$$\begin{aligned}\det\varphi' &= -r\sin\theta\sin\phi\begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} + (-1)r\sin\theta\cos\phi\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\ &= -r\sin\theta\sin\phi\cdot r\cdot\sin\phi\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} + (-1)r\sin\theta\cos\phi\cdot r\cdot\cos\phi\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} \\ &= r^2\sin\theta\sin^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\phi = r^2\sin\theta.\end{aligned}$$

ちょっと遊んで別の方法でやってみます。$A := \varphi'$ の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j$ と書きます:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

実は異なるベクトル同士は直交しています (計算しなくても分かる、なぜでしょう？):

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 = 0, \quad \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3 = 0, \quad \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_1 = 0.$$

A の転置行列 A^T と A の積を計算してみると、この直交性から結果は対角行列になります。

$$A^TA = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \boldsymbol{a}_3^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3^T\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3^T\boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a}_3^T\boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

この行列式は (対角成分の積なので容易に計算できて)

$$\det(A^TA) = 1 \cdot r^2 \cdot r^2 \sin^2\theta = (r^2\sin\theta)^2.$$

左辺は $\det(A^T)\det A = (\det A)^2$ に等しいので、$\det A = \pm r^2 \sin\theta$.

後は符号か…よい手はないかな。例えば $\theta = \pi/2$ のとき

$$\det\varphi' = \det\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \\ 0 & -r & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{3+2}(-r)\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r \cdot r = r^2$$

だから (連続性の議論で) + を採用して $r^2\sin\theta$. (ちょっと最後がカッコ悪い…)

F.6　Jordan 可測性、積分可能性をどう説明するか

現在 (2006/10/18)、スピヴァック [17] に倣って (一部杉浦 [14] の助けを借りて)、Lebesgue 零集合を導入して、それで積分可能性の必要十分条件を示している。

これは良く知られているはずだが、案外採用してある本が少ない。なぜだろう。

微分積分学は初学者が学ぶもので、必要十分条件をありがたがっても仕方がない、分かりやすい十分条件を提示できればそれで良いということか。それは一理ある。

それを認めたうえで、このやり方を採用する理由を説明 (弁解?) してみたい。

「不連続点全体が Lebesgue 零集合ならば Riemann 積分可能」であるという命題の証明は、「不連続点全体の Jordan 測度が 0 ならば Riemann 積分可能」という命題の証明とほとんど同じで手間に差はない。強いて言えば「Lebesgue 零集合」を定義する手間が多いくらいか。

一方、「Riemann 積分可能ならば不連続点全体が Lebesgue 零集合」という命題をさぼると、「Jordan 可測性であるためには、境界の Jordan 測度が 0 であることが必要十分」という命題 (これは是非とも必要と考える) の必要性部分の証明を新たに用意しなくてはならなくなる。この手間は「Riemann 積分可能ならば不連続点全体が Lebesgue 零集合」という命題を証明する手間とそれほど大きな差がない、と私は考えている。

手間がそれほど変らなければ、必要十分条件が分かった方が気持ちが良いのではないだろうか？

F.7　その他 (防忘録)

- 金子先生は Koch 曲線は正の Jordan 外測度を持つと書いていたが、本当かな？これは Osgood 曲線のことを言っていたつもりらしい。

- Hausdorff 次元、Hausdorff 測度、Hilbert 曲線などなど書きたい。
- 実はこの文書の広義積分は、結局は絶対収束なのか？証明できるか。(p.82 の余談 1.7.1 を見よ。)
- Ω が Jordan 可測ならば Ω° はコンパクト近似列を持つが、Ω 自身はコンパクト近似列を持つかどうか？
- Jordan 領域は Jordan 可測とは限らないような気がするが、具体的な反例は？ — 上の Osgood 曲線を使えば良い？
- スターリングの公式くらい書くか？
- ベルヌーイ数について書こうと思ったんだけど、どうしてだろう？（思い出せない。）