

十進BASIC (4) テイラー級数の計算 — 円周率で遊ぶ

かつらだ まさし
桂田 祐史

2012年5月23日

この授業用の WWW ページは <http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2012/>

今回の話は、表向きは、由緒正しく、定番の Taylor 展開の計算です。

数学と縁を持ったのならば、一生に一回くらいは、円周率の計算で遊んでみるのが良いと思っています。幸い十進 BASIC を使うと、古人の試みをかなり簡単に目の前のコンピューターで再現することができます¹。

円周率の計算法には、比較的素朴なものから、かなり高度な理論を使うものまで色々あり、それらすべてを理解するのは大学2年次の段階でも困難ですが(正直に白状すると、私も理解していないことが沢山あります — 専門家でもないです)、微積分で学んだテイラー展開を用いる方法(それ以前の方法となると、一気に紀元前のアルキメデスの方法(A.2.1 参照)に遡ります)は手頃であり、学ぶ価値がある「古典」と言えるでしょう。また「高級な」理論に基づく方法も、計算に用いる手順そのものは簡単なので、プログラムを書いて走らせてみて、その凄さを体験することは可能です。

脱線 まだ現在のように整備されていなかった時代の数学をきちんと理解するには、当時の人達の計算を追体験することが有益というか必要だと信じています。ただ当時のやりかたそのまま計算するのは非常に骨が折れるので、適度にコンピューターを利用するのが有効です(その際、自分でプログラムを書くことが大事です)。コンピューターによる数値計算は、微分方程式の数値シミュレーションが強調されることが多いですが、数学史での利用も大いに考えるべきだ、と思っています。(あまり大きな声では言えませんが、計算の確認を怠ってトンチンカンなことを書いている人がいたりします。)

1 連絡事項

1.1 課題5Bへの取り組み方について

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2012/jouhousyori2-2012-05/node7.html>

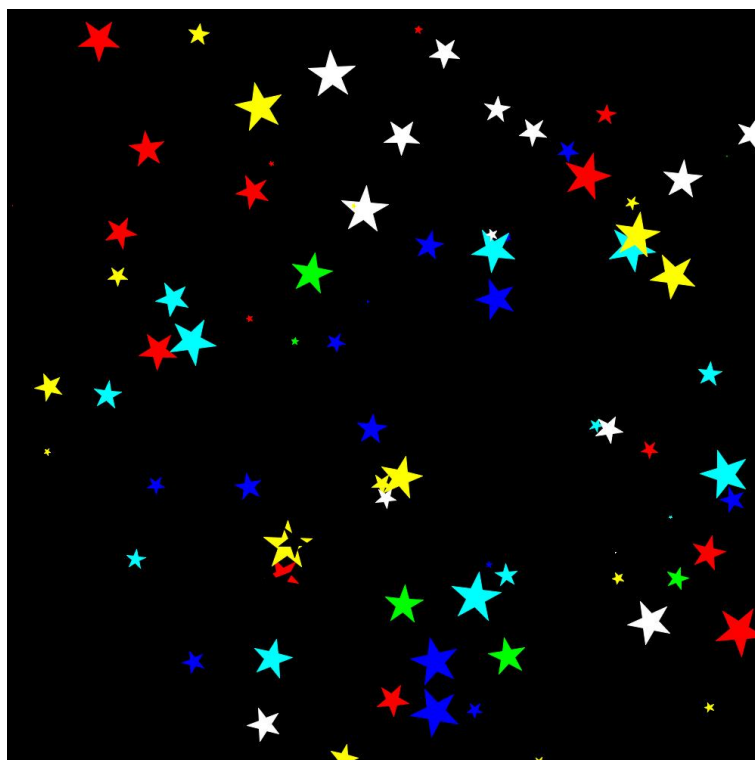
¹一方、手計算で追試しようとする、とてもやる気になれないくらいの大計算が多いです。コンピューターがなければ実際に遂行するのは困難でしょう。

グラフィックスは色々試行錯誤しながら進められる(そうするのが面白いし、ためになる)ので、粘り強くやって下さい。

- 締切は 5 月 29 日 (火) 18:00 としています。
- (1) と (2) のどちらか一方のみの提出で OK です。(2) は少し難しく研究課題的なので、ぜひ (2) を出したいというのであれば、(1) を選ぶのが妥当だと思います。
- (1) で、PAINT を使わずに星形を好きな色で塗れば完璧ですが、そうできなくても構いません。色々な目標が考えられます。(以下は、私 (桂田) が想定する描き方を適当に並べたものですが、他にも色々あるかもしれません。)
 - (i) 10 個の頂点の座標を計算して (少し手間がかかるけれど、落ち着いて考えれば高校数学ですから。複素数を使うという工夫もあるかもしれません。計算結果は配列に記憶しておくのがお勧めです)、MAT PLOT AREA を使って星形を塗る。
 - (ii) タートルグラフィックスを使って、星形を一筆描きする (中を塗るのに一工夫必要、亀に記憶力を持たせる?、自力で解決できたら大したもの)。
 - (iii) 外側の五角形の頂点の座標を求め、一つおきに結んで星形を描く。PAINT を用いて 6 つの領域を塗り潰す。
 - (iv) (締切に間に合いそうもない…) 星形という目標を正 5 角形に落として、MAT PLOT AREA で塗り潰し、PAINT で塗り潰し、etc.

座標を式で計算するのではなく、目分量で試行錯誤して選んでいる人がいますが、そういう場合は方眼紙 (ネットで入手可能) の上に星を描いて、座標を読み取るのが良いでしょう (ローテクと馬鹿にしないこと)。

式を使って、自動化すると、色々凝ることが出来ます。大きさを変えて、角度を変えて、場所を変えて、乱数で星を撒くと、、、



2 テイラー展開の計算による円周率計算

2.1 テイラー展開

関数 f が点 a の近傍で**解析的**であれば、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots$$

が成り立つ (明治大学数学科学生は、部分的には基礎数学 4, 詳しくは関数論で学ぶ)。

これを関数値 $f(x)$ の計算に用いることがあります。具体的には十分大きな n に対して、 n 項までの部分和

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (\text{これは } x \text{ の多項式})$$

を計算し、それを $f(x)$ の近似値に採用するわけです。

2.2 まずは簡単な e の計算

自然対数の底 (Euler の数, Napier の数とも言う) e の計算で実践してみましょう。

e は $e^x = \exp x$ の $x = 1$ における値なので、テイラー展開

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

に $x = 1$ を代入して

$$e = \exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots$$

これを例えば 10 項まで足すと

$$\sum_{j=0}^{10} \frac{1}{j!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!} = 2.718281801146\dots \quad (\text{赤字の位は正しい})$$

と (実は小数点以下第 7 位まで正しい) e の近似値が得られます。

さて、それでこの計算をどう実行するか。和の計算は前回やりました。

復習: 和 $\sum_{j=1}^n a_j$ の計算の定跡

```
s=0
for j=1 to n
  s=s+(aj を計算する式)
next j
```

これを参考に、一般項 $a_j = \frac{1}{j!}$ が漸化式

$$a_0 = 1, \quad a_j = \frac{a_{j-1}}{j} \quad (j \geq 1)$$

で与えられることを利用すると、次のコードが得られます。

$s_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}$ を $n = 10$ として計算

```
REM 自然対数の底をテイラー級数で計算
N=10
REM a0, s0
LET A=1
LET S=A
FOR J=1 TO N
  LET A=A/J
  LET S=S+A
NEXT J
PRINT S
END
```

問 色々な N に対する部分和を計算してみよう。どうするのが良いか? (正解と言えるものはないかもしれないが、工夫してみよう。)

表示する桁数の指定

例えば変数 S の値を小数点以下 10 位まで表示させるには、PRINT USING という命令を利用して

```
PRINT USING "#.#####": S
```

(小数点 . の後に # が 10 個続いています。)

とすれば OK です。十進 BASIC を OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH として、10 進 1000 桁モードで利用すると、1000 桁表示されてしまい、逆に面倒です。こういう場合は、小数点以下 100 位 (あるいは少し余裕を見て 110 位とか) まで表示するのが良いでしょう。そのためには、# を 100 個並べて

```
PRINT USING "#.#####(中略)#####": S
```

(小数点 . の後に # を 100 個続ける…)

としても良いですが、# を 100 回数えながらタイプするのは面倒ですね。少し手助けしておきます。文字列演算機能を利用して (文字列の連結演算子 &, 文字列を指定した回数繰り返す REPEAT\$(), なお文字列)、次のようにしてみましょう。

```
FMT$="#."&REPEAT$("#",100)
```

```
PRINT USING FMT$: S
```

なお、FMT\$, REPEAT\$() の \$ は、変数や関数が文字列である場合につける決まりになっている文字です。

2.3 レポート課題 6A (本日の出席証明)

e の値を小数点以下第 100 位まで正確に求めて下さい (数学的に厳密でなくても構いません)。こちらが結果をチェックしやすいように、第 96 ~ 100 位が何であるかも書いて下さい。計算に使用したプログラムを「ファイル」として添付して下さい。

SNS「第 6 回 (2012/5/23)」² に書き込んで下さい (特に理由がない限り、今日中に)。

その結果がなぜそこまで正しいと判断したか、理由を簡単に書いて下さい (証明でなくても構いませんし、手短で良いです)。

²http://sns.math.meiji.ac.jp/?m=pc&a=page_c_topic_detail&target_c_commu_topic_id=1390

2.4 $\tan^{-1} x$ ($\arctan x$) のテイラー級数で π を計算しよう

円周率 π は、例えば

$$\pi = 4 \arctan 1 \quad (\text{マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数}),$$

$$\pi = 6 \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{シャープの級数})$$

のように \arctan を計算することで求められます。

テイラー級数の計算では、級数の一般項の計算に漸化式を用いるのが便利なが多いです (実はこの \arctan については「それほど便利でもない」かもしれませんが、漸化式が便利なが多いので (例えば $\exp x$ の計算を考えてみて下さい)、ここではその線で説明します³)。

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} x^{2j-1}$$

については、

$$a_j = \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} x^{2j-1}$$

そのものの漸化式はあまり計算に便利ではありませんが、

$$t_j = (-1)^{j-1} x^{2j-1}$$

とおくと、 t_j は簡単な漸化式

$$t_1 = x, \quad t_j = -x^2 t_{j-1}$$

を用いて計算でき、 a_j は

$$a_j = \frac{t_j}{2j-1}$$

で計算できます。そこで次のようなプログラムを得られます。

³漸化式というと、それを与えられて「一般項を求めよ」という問題のネタにされる場合が多い印象があるかもしれませんが、その逆に一般項は分かっているけれど、それを計算するために漸化式を作る必要がある場合が少なくありません。

piarctan.bas

```
REM piarctan.BAS --- マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数でπを計算
REM arctan x の級数を第 n 項まで計算
INPUT X
INPUT N
F=-X*X
T=X
S=0
FOR J=1 TO N
  A=T/(2*J-1)
  S=S+A
  T=F*T
NEXT J
PRINT "arctan(x) ≐";S
PRINT "その 4 倍";4*S
REM 組込み定数 PI との差を計算してみる
PRINT USING "πとの差=-%.###^~~~~~";4*S-PI
END
```

これを用いて

$$\pi = 4 \arctan 1 = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right)$$

という級数を第 n 項まで計算すると、次のような結果が得られます。

n	$4s_n$
10	3.04183961...
100	3.13159290...
1000	3.1405926538...
極限	3.1415926535...

$\pi = 3.14159265358979323846\dots$ との一致具合はどうでしょうか？(誤差⁴はどれくらいでしょうか) 不思議なことに気付いた人、もしその理由が分かったら、レポートを書いて送って下さい。

2.5 レポート課題 6B

付録(例えば A.2.2)にある公式のどれかを使って円周率を小数点以下第 100 位まで求めて下さい(ちなみに、マーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数に基づくサンプル・プログラム piarctan.BAS そのままで 100 位まで計算するのはまず無理です。せめてシャープの級数にして下さい)。100 位まで計算する場合と、1000 位まで計算する場合で、計算の手間(加える項の数がどれくらい必要か)がどう変わるを調べて下さい。

arctan 型の公式を使う場合は、上のプログラム例がたたき台となるでしょう。

⁴誤差とは、真の値と計算値との差、この場合は $\pi - 4s_n$ のことを言います。

AGM 公式を使うのは案外簡単かもしれません。

選んだ方法 (公式)、計算に用いた BASIC プログラムとその簡単な説明、そのプログラムの実行結果、簡単な分析を含んだ $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 文書 `kadai6b.pdf` を作成し、PDF に変換したものを Oh-o! Meiji で送って下さい。締め切りは 6 月 5 日 (火曜) 18:00 とします。

現在の世界記録は 10 兆桁 (らしい) ですが、ここで要求している「100 桁, 1000 桁」は、そのような「とんでもない」計算とは違って、素朴な \arctan の計算 (ただし 0 のまわりの \arctan の Taylor 展開の収束半径ギリギリの $\pi/4 = \arctan 1$ だけは、遅すぎて使いものにならない) で十分です。

A 円周率の計算の歴史

以下の解説は、2007 年にさらっと書いたものです (2009, 2010, 2011 年に世界記録の更新があったけれど、それについては簡単に書き足しただけ)。計算法の話については、例えば <http://円周率.jp/> に詳しく載っています。

A.1 円周率の概念

A.1.1 円周率の定義

数学科の学生であるから「円周率って何?」と訊かれたら定義を言えるようになって欲しいですね。日本語の場合は言葉の字面からも示唆されるように、普通は

$$\text{円周率} = \frac{\text{円の周の長さ}}{\text{円の直径の長さ}}$$

で定義されます (本当はその前 (後?) に任意の円について、この値が一致することを確認する必要がありますね)。

西洋数学には、日本語の「円周率」に相当する言葉は実はないのだそうです。ただギリシャ語のアルファベットの 1 つである π で表すことが習慣になっているだけです。

A.1.2 円の面積、球の表面積・体積

円周と直径の比として定義されたので、

$$\text{「半径 } r \text{ の円の円周は } 2\pi r \text{」}$$

は当たり前ですが、

$$\text{「半径 } r \text{ の円の面積は } \pi r^2 \text{」}$$

は、全然当たり前ではありません。事実そのものは早くから知られていたと思われませんが、証明をしたのはアルキメデスと言われています⁵(ちなみにアルキメデスは、球の表面積 $4\pi r^2$ と体積 $4\pi r^3/3$ を発見し、そのことを証明したことで非常に名高い)。

余談になりますが、円周、円の面積、球の表面積、球の体積のいずれにも π が (π^2 , π^3 でなく) 生で現れるのは、不思議と言えは不思議です (2年生は、後期に一般の n 次元球の「体積」や「表面積」を学ぶ機会がありますが、そのときにどうなるか、目を凝らして見て下さい)。

A.1.3 無理数性・超越性

古代ギリシャの時代から、円周率は無理数ではないかと想像されていたと思いますが、実際に「円周率は無理数である」ことを証明したのは、ハインリッヒ・ランベルト (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777, Mülhausen (Mulhouse, 現在のフランス) に生まれ、Berlin にて没する、物理・数学・地図投影法に業績がある) です (1761年)。彼は \tan の連分数展開

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \dots}}}}$$

を用いて、「 x が 0 以外の有理数ならば $\tan x$ は無理数である」ことを証明しました (π が無理数であることはこの定理の簡単な系です)。

代数学を学ぶと、**超越数 (transcendental number)** という概念を学びます。「円周率は超越数」です (要するに整数係数の多項式の根にはならない)。これを証明したのは、リンデマン (Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852–1939, 巨人 Hilbert の師匠としても有名⁶) という人でした (1822年)。

A.1.4 (蛇足) 何桁くらい分かればよいか?

この話は省略したいくらいなのですが、どうも頓珍漢なことをいう人もいるので念のため。小学校の算数で丸いものの直径と周囲を測らされることがありますが、それによると 3.1 と 3.2 の間くらいであることは何とか分かりますが、その一つ下の桁 3.14 までを出す ($3.14 < \pi < 3.15$) のは大変というか、よほどの工夫をしない限り無理です。

…ということは算数の話題であって、よく理解されていることであると信じていたのですが、世の中にはどうも「数学で難しい計算をしなくても、実際に円を描いて測れば円周率が分かるではないか?」と考えている人がいるみたいです (私の勘違いでしょうか)。

⁵有名なユークリッドの原論には、円の面積は r^2 に比例すると解釈される定理が載っていますが、 πr^2 とは言い切っていません。論証数学として面積・体積を堂々と取り扱ったのはアルキメデスが最初です。例えば円錐や角錐の体積が「底面積×高さ÷3」であることを発見したのは、原子論で有名なデモクリトスで、証明したのはアルキメデスです。アルキメデスはまた放物線の囲む面積を求めることにも成功しています。図形の重心の決定など、今だったら積分を使って計算するようなことを、微積分のない時代に実行したのは、まさに時代を越えた天才と言えるでしょう。

⁶何でも 60 人の博士を出したとか。

その方法 (実際に円周の長さを測定することで円周率を求めること) では、精度をあげるのはとても大変です。逆に言うと、現実世界の工学的問題を相手にする限り、円周率の桁数はそんなにたくさんは必要ないということです (10 桁の精度の工作は難しいのではないですか? 職人がマイクロン・オーダーの加工をするとっても)。

問: 宇宙の直径 (100 億光年のオーダー) の円の円周を原子の大きさ (オングストロームくらいでしょうか?) の精度で求めるには、円周率が何桁まで分かればよいか。

一方で、3.14 もあれば十分だと発言する人がいたりするのも困ります (テレビで某数学者がそんなことを言っていました…)。何でもかんでも 3 桁の精度で済むはずはないでしょう。1m のものを作るのに 1mm の誤差は、日曜大工ならば全然オッケーかもしれませんが、許されない場合もあるのは少し考えれば分かりますね。

A.2 円周率の計算法の変遷

A.2.1 円に接する正多角形の周長を用いる方法

円周の長さや円の面積をどう求めるか、古くから色々な方法が知られていましたが、無理数であることもあって、完全な解答を得るのは困難でした。アルキメデスによって、すべての問題は円周率の値を決定することにはつきりと帰着されました。当然彼は円周率の値を調べることになります。アルキメデスは論文「円の計測」のなかで、円に内接する正多角形の周長と外接する正多角形の周長を用いて、円周率の下からの評価と上からの評価を得るというアイデアを提出しました。

これについては挑戦課題 2C1 を出してあります (これは <http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2012/jouhousyori2-2012-04/node8.html> に置いてあります)。その課題の文章を見てもらえれば分かりますが、四則と平方根の計算だけを使って、正 96 角形の周長の計算を行い、それにもとづき

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

を証明したということです。

ところでこの正多角形の周長から円周率の近似値を求める方法は、これ以降 1000 年以上、人類が知るほとんど唯一の方法でした (中国、ペルシャ、色々な場所、色々な時代に計算に挑戦する人が現れました)。

ドイツの Ludolph van Ceulen (1540–1610, ドイツの Hildesheim に生まれ、オランダの Leiden にて没する) が内接正 2^{62} 角形の周長で 35 桁の値を計算した (1596 年) というのが、有名です。

A.2.2 逆三角関数のテイラー展開を用いる方法

円周率を逆三角関数の値を元にして表現し、逆三角関数をテイラー展開で計算するという公式が現れました。有名なものは、「グレゴリー級数」または「ライプニッツ級数」とも呼ばれる

$$(1) \quad \frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

です。これは

$$(2) \quad \arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \quad (|x| < 1)$$

を基礎としているわけですね⁷。

この (2) は、現在の数学のカリキュラムでは、微積分を用いて、いわゆる Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

として理解するのが普通ですが、驚いたことに微積分がなかった 1400 年頃のインドで発見されていた (発見者はマーダヴァという名前だとか) ことが分かっています。

余談

\arctan の計算には

$$\arctan x = \frac{y}{x} \left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}y^2 + \dots \right), \quad y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

も使われた (L. Euler が使ったのが有名)。

また Newton が発見した

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

も利用できる。

なお \arcsin^2 の展開

$$(\arcsin x)^2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!2^n)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

は Euler の 1737 年の発見ということになっているが、江戸時代の和算家^{たけべかたひろ}建部賢弘の 1722 年の^{てつじゅつさんけい}綴術算経に載っている。

実は (1) は、収束が遅すぎて (項数を非常に大きく取らないと良い近似値が得られない) 実用的ではありませんが、

もっと小さな x の \arctan を用いるとずっと実用的

になります。このことを使って円周率を計算するチャレンジャーが大勢現れました。

⁷細かいことを言うと、 $x=1$ が式に代入できることの検証はあまり簡単ではありません。自力でレポートが書けたらそれだけで単位を出してもよいくらい。

挑戦者達

Abraham Sharp (1651–1742)

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

John Machin (1680–1752, ロンドン大学天文学教授) は 1706 年に

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

を用いて 100 桁の値を計算した。以後この公式は多くの人達に採用されることになる。William Shanks (1812–1882) が 707 桁計算したのが有名 (567 桁までが正しかった)。

L. Euler (1707–1783, スイスの Basel に生まれ、ロシアの Petersburg に没する) は 1737 年に以下の公式を得た。

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}, \quad \pi = 20 \arctan \frac{1}{7} + 8 \arctan \frac{3}{79}.$$

Charles Hutton (1737–1823) は 1776 年に次の結果を得た。

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = 2 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{7} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \\ &= 3 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{5}{99}. \end{aligned}$$

有名な C. F. Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) は、

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{38} + 20 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} + 24 \arctan \frac{1}{268}$$

を発見した (1863 年)。また 9 項からなる公式

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 2805 \arctan \frac{1}{5257} - 398 \arctan \frac{1}{9466} + 1950 \arctan \frac{1}{12943} + 1850 \arctan \frac{1}{34208} \\ &+ 2021 \arctan \frac{1}{44179} + 2097 \arctan \frac{1}{85353} + 1484 \arctan \frac{1}{114669} + 1389 \arctan \frac{1}{330182} \\ &+ 808 \arctan \frac{1}{485298} \end{aligned}$$

も得ていたとか (ちょっと啞然としますね — もっとも並列計算でもしないと速くなりませんが)。

1896 年に F. C. M. Störmer が得た次の公式は、金田・^{うしろ}後の世界記録 (2002) の検証計算にも使われたもので、高い効率を実現します^a。

$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} - 12 \arctan \frac{1}{682} + 24 \arctan \frac{1}{12943}.$$

^a高野公式の計算時間が 400h, Störmer 公式の計算時間が 157h だったそうです。

この解説を最初にした 2007 年時点での円周率計算の世界記録は、金田 康正、後 保範等^{うしろ やすのり}のグループによるものでした (2012 年現在の時点でどうなっているかは後述)。これは 2002 年に 1 兆 2400 億桁計算したというものですが、そこでは、高野喜久雄⁸氏による公式 (1982)

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443}$$

を用いたそうです (共立出版の雑誌 bit 1983 年 4 月号への寄稿に、この公式発見のいきさつが書いてあります)。

A.2.3 AGM (算術幾何平均) を用いる方法

(準備中 — この項は書きかけです。)

1976 年、 π の計算法の歴史の新しい 1 ページが開かれた。

E. Salamin と R. P. Brent により独立に、次の手順が「発掘」された。

Salamin-Brent のアルゴリズム (別名 Gauss-Legendre のアルゴリズム)

$a = 1, b = 1/\sqrt{2}$ として、

$$(3) \quad \begin{cases} a_0 := a, & b_0 := b, \\ a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ c_n := \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

で定義された数列を用いて

$$\pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum_{k=0}^n 2^k c_k^2}$$

とおくとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = \pi \quad (\text{単調増加}).$$

これは無限級数でなく、漸化式で定義された数列の極限として π をとらえているわけだが、いわゆる 2 次の収束 (4) をするので非常に速く高精度の値が得られる。収束の速さに関しては

$$(4) \quad \pi - \pi_{n+1} \leq \frac{2^{-(n+1)}}{\pi^2} (\pi - \pi_n)^2 \quad (2 \text{ 次収束}),$$

$$\pi - \pi_n \leq \pi^2 2^{n+4} e^{-\pi \cdot 2^{n+1}}.$$

⁸高野喜久雄 (1927–2006, 佐渡に生まれ、鎌倉にて没する) は詩人で、合唱曲の作詞などでも知られている。— なかなか素敵な WWW ページ (<http://www.asahi-net.or.jp/~yp5k-tkn/>) を持っていらっしやいましたが、現在は残っていないようです。

計算法の背景 (細かい話になるけれど、一応書いておく。)

「発掘」された方法の基礎となっているのは、19世紀数学の華とも呼ばれる**楕円関数論**からの次の二つの事実である。

(i) 第一種完全楕円積分

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (0 \leq k < 1)$$

と第二種完全楕円積分

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta \quad (0 \leq k \leq 1)$$

の間に成り立つ **Legendre の関係式** (Legendre's relation) と呼ばれる

$$(5) \quad K(k)E(k') + K(k')E(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2} \quad (\text{ただし } k' := \sqrt{1-k^2})$$

という式の、特に $k = 1/\sqrt{2}$ の場合の

$$(6) \quad 2K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) $K(k)$, $E(k)$ はいわゆる**算術幾何平均** (arithmetic geometric mean, AGM) アルゴリズムで計算できる。第一種完全楕円積分、第二種完全楕円積分の2変数版 $I(a, b)$, $J(a, b)$ を

$$I(a, b) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}, \quad J(a, b) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} d\theta$$

で定めるとき、

$$I(a, b)M(a, b) = \frac{\pi}{2}, \quad J(a, b) = \left(a - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right) I(a, b)$$

が成り立つ。ここで $M(a, b)$ は a, b の算術幾何平均と呼ばれる量で、(3) で定義される数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の共通の極限として定義される:

$$M(a, b) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

また数列 $\{c_n\}$ は

$$c_n := \sqrt{|a_n^2 - b_n^2|}$$

で定義される。容易に

$$K(k) = I(1, k'), \quad E(k) = J(1, k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

であることが分かるので、

$$(7) \quad K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{M(1, 1/\sqrt{2})}, \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right) \frac{1}{M(1, 1/\sqrt{2})}.$$

(7) を (6) に代入して整理すると

$$\pi = \frac{2M(1, 1/\sqrt{2})^2}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}.$$

ここで述べたことはすべて 19 世紀の段階で分かっていたわけであるが、 π の計算法として、このアルゴリズムが 1976 年という時点で初めて注目（「発掘」）されるようになった理由は、この方法が最初から長い桁の数の掛け算、平方根を必要とするため、 \arctan の級数展開を利用する方法と比べて不利だと考えられたせいであろう。1971 年の Strassen と Schönhage による **高速乗算法**（これは **高速 Fourier 変換** に基づいている — 1965 年に発見された手法）の発見により、その立場が逆転してしまった。2 つの n 桁の数の積の計算が $O(n^2)$ ではなく、 $O(n \log n)$ 程度の計算量で実行可能というのは、発見当時は驚くべきことだったと思われる。

A.2.4 現在の到達点

ラマヌジャン型公式 不思議な天才 Ramanujan (Srinivasa Aiyangar Ramanujan, 1887–1920, インドの Erode に生まれ、インドの Kumbakonam にて没する) が発見した

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} &= \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 \cdot 396^{4n}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^p \left(\prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)(4k-3)(4k-1)}{2k^3 198^4} \right) (26390n + 1103). \end{aligned}$$

や、その系統の公式がいくつかある。

Chudnovsky の公式（現在最高速？）

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{n=0}^p \left(\prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)(6k-5)(6k-1)}{9k^3 106720^3} \right) (-1)^n (545140134n + 13591409).$$

DRM の発見 AGM 法が発見されてしばらくは、AGM 法の効率がダントツに高いとされていたが、最近になって、^{うしろ}後保範氏によって考案された **DRM**（分割有理数化法）によって、 \arctan 公式や Ramanujan 型公式に現れるような級数の和を効率的に計算できるようになった。現在では、 \arctan 公式、AGM、Ramanujan 型公式のいずれも $O(n(\log n)^p)$ ($p = 2, 3$) の計算量で計算できることになり、その点だけで見ると、あまり差がなくなった、ということである。

『分割有理数化法 (DRM) による多数桁関数値計算と円周率計算の世界記録』, 後保範 (2005 年 1 月 25 日, 3 月 3 日)

<http://www.hucc.hokudai.ac.jp/pdf/Ushiro/20050224gijyutsu/paper4/paper4.pdf>

有名な金田氏と後氏等のグループによる 2002 年 11 月の世界記録 (1 兆 307 億桁) は、 \arctan 公式を用いて達成されたものであるので、 \arctan 公式が抜き返した、という言い方も出来るだろう。

2010年6月の時点で 次はどうなるのだろうか…Ramanujan 型公式だろうか？と思っていたら、昨年久しぶりに動きがありました。

- 2009年4月 高橋大介 (筑波大学), AGM法 (Gauss-Legendre の公式) で2兆5769億桁 (T2K 筑波システムで29時間)
- 2009年12月 Fabrice Bellard, Chudnovsky の公式で約2兆7000億桁 (Intel CPU を用いたパソコンによる計算, 115日)
検算は BBP 公式 (全桁検証ではない)

2012年5月の時点で

- 2010年8月2日 Alexander J. Yee (余智楓), 近藤茂, Chudnovsky の公式で5兆桁 (メモリ 96GB, 外部記憶 32+6TB のパソコンで90日)
http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-5t/announce_jp.html
検算は BBP 公式
- 2011年10月16日 Alexander J. Yee (余智楓), 近藤茂, Chudnovsky の公式で10兆桁