情報処理 2 第 10 回

Mathematica 体験 (4)

桂田(かつらだ) 祐史(まさし)

2012 年 6 月 27 日

この授業用の WWW ページは `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2012/`

今日は Mathematica の最終回です (次回課題 9 の解説はしますが)。

1　レポート課題 8 解説

「レポート課 8」[1]
うっかりしていました。締切りは先週だったから、先週のうちに説明すれば良かったですね。

後で使いそうなものは変数に代入しておくのがコツの一つです。

(1) 「661775625 を素因数分解せよ。」
これは `FactorInteger[ ]` 一発ですね。

```
In[1]:= n=661775625
In[2]:= FactorInteger[n]
```

これで `{{3, 2}, {5, 4}, {7, 6}}` という結果を得ます。$3^2 5^4 7^6$ という意味であるから、素因数分解は $661775625 = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^6$. 確認するには

```
In[3]:= 3^2 5^4 7^6
```

あるいは `3^2 5^4 7^6-n` として結果が 0 になることを確認する。

(2) 「$2^{15} - 1$ と $2^{20} - 1$ の最大公約数を求めよ。」
これも `GCD[ ]` 一発ですね。

[1] `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2012/jouhousyori2-2012-08/node8.html`

```
In[4]:= a=2^15-1
In[5]:= b=2^20-1
In[6]:= GCD[a,b]
```

31 という結果を得ます。やや強引 (能率の悪い手段) ですが、素因数分解してみます。

```
In[7]:= FactorInteger[a]
In[8]:= FactorInteger[b]
```

これから $2^{15}-1=7\cdot 31\cdot 151$, $2^{20}-1=3\cdot 5^2\cdot 11\cdot 31\cdot 41$ が分かるので、目で見て 31 が最大公約数であることが分かります。最大公約数は、例えば Euclid の互除法などで効率的に計算出来ますが、素因数分解は (わかりやすいけれど)、大きな桁数の整数の場合、かなりの計算時間がかかってしまうことがまれではありません。
とっさに作ったので間違っているかも知れないけれど、自分で互除法をする関数を作ってみて確認する例:

```
In[9]:= mygcd[m_,n_]:=If[n == 0, m, mygcd[n, Mod[m,n]]]
In[10]:= mygcd[a,b]
```

(3) 「$(a+b)^5$ の展開公式を作れ。」
これは楽勝ですね。おっと、a と b の掃除を忘れずに (実は最初忘れてしまいました…)。

```
In[11]:= Clear[a,b,n]
In[12]:= Expand[(a+b)^5]
In[13]:= TeXForm[%]
```

`a^5+5 a^4 b+10 a^3 b^2+10 a^2 b^3+5 a b^4+b^5` という結果を得ます。これは TEX に取り込むのは簡単です。

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

(4) 「2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ を解け。3 次方程式 $x^3+px+q=0$ を解け。」
これは ax を `a*x` や `a x` と間違えずに入力すれば問題ないでしょう。

```
In[14]:= sol=Solve[x^2+a x+b==0,x]
```

結果を取り込むのにちょっと工夫。

```
In[15]:= {x1,x2} = x/. sol
In[16]:= TeXForm[x1]
In[17]:= TeXForm[x2]
```

これから

$$x=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{a^2-4b}-a\right),\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-4b}-a\right).$$

もちろん授業でやったように、結果を x^2+ax+b に代入して確かめる、という手もあります。

```
In[18]:= x^2+a x+b /. sol
In[19]:= Simplify[%]
```

結果は {0, 0} になりました。

一方 $x^3+px+q=0$ の方も同様にやると

$$
\begin{aligned}
x = &\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{4p^3+27q^2}-9q}}{\sqrt[3]{2}3^{2/3}} - \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}p}{\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{4p^3+27q^2}-9q}},\\
&\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)p}{2^{2/3}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{4p^3+27q^2}-9q}} - \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{4p^3+27q^2}-9q}}{2\sqrt[3]{2}3^{2/3}},\\
&\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)p}{2^{2/3}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{4p^3+27q^2}-9q}} - \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\sqrt{3}\sqrt{4p^3+27q^2}-9q}}{2\sqrt[3]{2}3^{2/3}}.
\end{aligned}
$$

ごちゃごちゃしていて、訳がわかりませんね。式の簡単化はまだコンピューターまかせは難しいです (しかし上と同様に x^3+px+q に代入して、Simplify[ ] すると、ちゃんと 0 になります)。

(5) 「次の関数を微分せよ。 (i) $x^2\sqrt{x}+(x^3-x)\sqrt{x^2+x+1}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$」
するだけならば簡単。

```
In[18]:= y=D[x^2 Sqrt[x] + (x^3 - x) Sqrt[x^2 + x + 1], x]
In[19]:= Simplify[y]
```

Simplify[ ] するのが良いかどうか、分かりにくいですね。両方書いておきます。

$$
\begin{aligned}
\left(x^2\sqrt{x}+(x^3-x)\sqrt{x^2+x+1}\right)' &= \frac{5x^{3/2}}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\left(3x^2-1\right)+\frac{(2x+1)\left(x^3-x\right)}{2\sqrt{x^2+x+1}}\\
&= \frac{8x^4+7x^3+2x^2+5\sqrt{x^2+x+1}x^{3/2}-3x-2}{2\sqrt{x^2+x+1}}.
\end{aligned}
$$

これは確認計算が難しいですね。バカバカしいですが、積分してみることは出来ます (普通は難しい積分の確認をするのに微分してみるものですが…)。

```
In[20]:= Integrate[y,x]
```

結果は $x\left(x^{3/2}+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+x+1}\right)$ と元に戻りました。一方、

```
In[20]:= y=D[Sqrt[(1+x^2)/(1-x^2)],x]
In[21]:= Simplify[y]
```

これから

$$\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)' = \frac{2x}{(x^2-1)^2\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^2}}}.$$

これも Integrate[y,x] で元に戻るのが確認出来ます。

(6) 「(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^5}dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos x}dx$」

```
In[22]:= Integrate[1/(x-2)^5,{x,0,1}]
In[23]:= Integrate[1/(2+Cos[x]),{x,0,Pi}]
```

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^5}dx = -\frac{15}{64}, \quad \int_0^\pi \frac{1}{2+\cos x}dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

検算はやはり不定積分を微分して元の関数に戻ること、その不定積分を元に定積分の計算をしてみるくらいでしょうか。

```
In[24]:= y=Integrate[1/(x-2)^5,x]
In[25]:= D[y,x]
In[26]:= (y /. x->1) - (y /. x->0)
```

Out[25] で元の関数が出て来て、Out[26] は $-\dfrac{15}{64}$ となります。

2 レポート課題 9 について

「レポート課題 9」[2]

これは締切りが来週火曜 18:00 でした (何となく今週のように勘違いしていて、そう口走ったかもしれません、ごめんなさい)。次週解説します。

- 自分で関数を作ったり、リストをうまく使ったり、工夫してみて下さい。(後で役立つかもしれないので、とりあえず出来たら終わり、ではなくて色々工夫することを勧めます。)
- 3 次元グラフィックスですが、複数のグラフィックスを重ねて表示する際に、描画範囲をどう決めるか問題になります。
  - Show[ ] の引数の順番に意味があって、最初に指定したグラフィックスの描画範囲が優先されるようです。大きいものを最初に指定して下さい。

[2] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2/jouhousyori2-2012-09/node4.html

– `BoxRatios` というオプションがあって、`BoxRatios-> Automatic` や `BoxRatios -> {10,10,10}` のように指定できます。意味は Mathematica に尋ねて下さい。(追記) `PlotRange->All` というオプションも便利で、順番に関わらず、すべてのグラフィックス・オブジェクトを見えるようにしてくれる。

3 レポート課題10

締切は 7 月 20 日 (金) 18:00 とする (というわけで解説はしません)。Oh-o! Meiji で提出して下さい。

次のいずれかを選択して下さい。なるべく (1) をしてもらいたいです。

(1) 授業 (微積でなくても良く、数学でなくてもよい) などで現れた問題や例を、Mathematica を使って計算してみる。教科書、授業のノート、プリント、自分が読んだ本 (授業と全然関係無くても良い) などから、自分でやるのは大変そうな計算や、グラフ描画など、適当な問題を探して、それを解く。結果が正しいかどうか、検算したり、考えること。

(2) Mathemaitca が計算できない、あるいは間違えた結果を答えるような問題を見つけたら、その理由を分析して、どの辺に限界があるか確めてみる。

(3) 3 次元空間のラプラシアン $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ の極座標表示を Mathematica を使って計算せよ。

3 次元極座標は色々な流儀がありますが、ここでは「多変数の微分積分学 1」で紹介した

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

を使って下さい。$f(x,y,z) = g(r,\theta,\phi)$ とすると、

$$\begin{aligned} \triangle f &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}\right] \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial g}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}\right) \end{aligned}$$

となるはずです。

手計算でやるとどうなるか、`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/polar-laplace.pdf` にあります。

2 次元のラプラシアンの極座標表示、半分手で、半分コンピューターに解かせたものを `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/heat-fdm-2.pdf` の付録 **B.2** (p.105 付近) に書いてあります。